2006.1

SUPPORT DU COURS DE PHYSIQUE

MÉCANIQUE

© LPFR 2003

AVANT PROPOS

Je pense que, au vu des nombreux bons livres de physique existants, écrire un fascicule comme celui-ci est un inutile gaspillage d'efforts. Les sujets traités ici prennent environ 300 pages dans un des livres donnés en référence. Ici les mêmes sujets ne prennent que quelques dizaines de pages. Faut-il croire que dans un livre de physique on trouve plus de 200 pages inutiles? Bien sûr que non. Ce sont plus de 200 pages d'explications, de dessins et d'exemples qui manquent ici. Si j'ai finalement pris la peine de passer du temps à écrire ces pages c'est parce que je crains que si je vous demande d'acheter un livre de physique, peu d'entre vous le feront et encore moins le liront. J'ai l'espoir qu'un petit fascicule distribué librement soit moins intimidant qu'un livre.

Quand au contenu, les deux premiers chapitres sont des rappels concernant le traitement mathématique et géométrique du mouvement. La physique proprement dite commence avec le chapitre suivant avec les lois de mouvement de Newton.

La partie plus amusante commence avec la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

D'aucuns trouveront que dans ce fascicule il y a trop de "baratin" à lire et seront tentés de l'ignorer pour aller chercher "la formule à utiliser" (suivant votre expression). Ils ont tort: la physique c'est "le baratin". Les formules ne sont que le moyen de quantifier les grandeurs. Si vous sautez le "baratin" vous êtes en train de jeter le jambon (ou le fromage) du sandwich.

Les termes imprimés en **caractères gras** dans le texte, correspondent, en général, à de nouvelles définitions. Je les ai regroupés dans l'indice alphabétique (à la fin du fascicule).

Je prie le lecteur de me signaler toutes les erreurs trouvées (même les erreurs banales), ainsi que les explications trop obscures.

LPFR

ALPHABET GREC

nom	majuscule	minuscule
alpha	A	α
beta	B	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	E	ϵ, ε
dzéta	Z	ζ
êta	H	η
thêta	Θ	θ
iota	I	ι
kappa	K	κ
lambda	Λ	λ
mu	M	μ
nu	N	ν
ksi	Ξ	ξ
omicron	O	o
pi	Π	π
rô	P	ρ
sigma	Σ	σ, ς
tau	T	τ
upsilon	Υ	υ
phi	Φ	ϕ, φ
khi	X	χ
psi	Ψ	ψ
oméga	Ω	ω

TABLE DES MATIÈRES.

1. MOUVEMENT RECTILIGNE.

1.1 Vitesse.

La trajectoire d'un corps en mouvement rectiligne est une droite. Choisissons l'axe des X parallèle à cette droite.

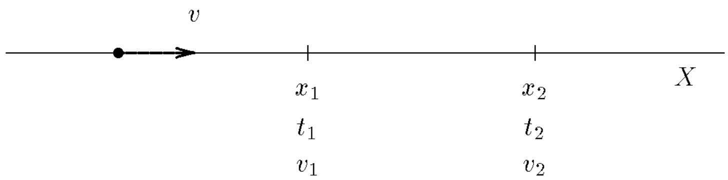


Figure 1.1 L'objet avance le long de la ligne. Il passe au moment t_1 au point x_1 avec une vitesse v_1 et au moment t_2 au point x_2 avec une vitesse v_2. Si la vitesse est constante $v_1 = v_2$.

La **vitesse moyenne** de l'objet entre les points x_1 et x_2 est définie comme:

$$v_{moy} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

où t_1 et t_2 sont les temps de passage du corps par les points de coordonnées x_1 et x_2 respectivement. Si le corps avance dans le sens des x croissants, la vitesse sera positive.

La **vitesse instantanée** d'un corps à un temps (et à un endroit) donné est égale à la vitesse moyenne de ce corps mesurée dans un tout petit intervalle de temps qui contient l'endroit.

Dans la réalité, l'intervalle de temps ne peut être infiniment petit car nous sommes limités par la résolution de nos appareils de mesure de distance et de temps. Donc, en toute rigueur, nous ne sommes capables de mesurer que des vitesses moyennes. Par contre, mathématiquement, la vitesse instantanée correspond à la limite de la vitesse moyenne quand l'intervalle de temps tend vers zéro:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

où $\Delta x = x_2 - x_1$ et $\Delta t = t_2 - t_1$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

La vitesse se mesure en $m\grave{e}tres/seconde$.

1.2 Espace parcouru.

Calculons l'espace parcouru par un corps en mouvement rectiligne à vitesse v pendant un temps compris entre t_1 et t_2. De

$$v = \frac{dx}{dt}$$

on extrait dx:

$$dx = v\,dt$$

On intègre cette équation entre t_1 et t_2. Si nous appelons x_1 et x_2 les positions du corps aux temps t_1 et t_2 nous pouvons écrire:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \tag{1.1}$$

Pour calculer l'intégrale de droite il faut connaître l'expression mathématique de v en fonction du temps. Dans le cas le plus simple, celui où v est constante, nous pouvons sortir v du signe intégral et intégrer directement:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = v \int_{t_1}^{t_2} dt = v\,(t_2 - t_1)$$

Si l'on préfère, on peut écrire cette même expression sous cette forme:

$$x = x_1 + v\,\Delta t$$

qui se lit "la nouvelle position est égale à la position initiale plus la vitesse par l'intervalle de temps". Remarquez que la nouvelle position se situera à gauche de la position initiale si la vitesse est négative.

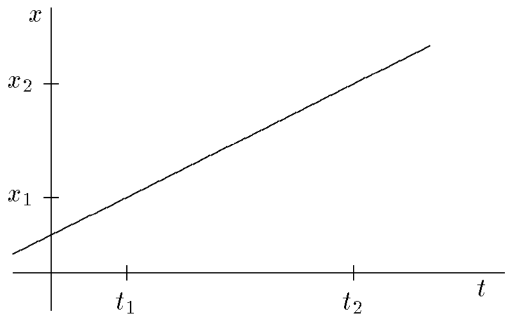


Figure 1.2 Quand la vitesse est constante, l'espace parcouru augmente (ou décroît) linéairement avec le temps. La pente de la droite est égale à la vitesse.

Récemment, dans quelques textes français, on s'est mis à nommer **équation horaire**([1]) l'équation de l'espace parcouru en fonction du temps. Certains, faute d'avoir des idées originales, se rabattent sur la création de nouvelles appellations pour les inventions ou découvertes de plus doués qu'eux. Comme on trouve toujours des moutons de Panurge pour suivre le mouvement, je mentionne ce nouveau nom car, même s'il est imbécile, vous pouvez le trouver dans un texte de concours.

1.3 Accélération.

Quand la vitesse n'est pas constante on définit l'**accélération moyenne** comme:

$$a_{moy} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

L'accélération se mesure en $mètres/seconde^2$.

L'**accélération instantanée** est égale à l'accélération moyenne dans un intervalle le plus petit possible. Comme dans le cas de la vitesse, dans la réalité nous ne pouvons pas mesurer

([1]) Même si il avait été indispensable de baptiser cette équation et compte tenu que dans le Système International on mesure le temps en secondes et non en heures, il aurait été moins crétin de la baptiser "équation chronométrique" ou similaire, au lieu d'"équation horaire" qui fait penser à l'Indicateur des Chemins de Fer.

des accélérations vraiment instantanées à cause de la limitation de nos appareils de mesure. Mathématiquement l'accélération instantanée est égale à la limite de l'accélération moyenne quand l'intervalle tend vers zéro:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

où $\Delta v = v_2 - v_1$ et $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

On peut calculer la variation de vitesse dans l'intervalle de temps de t_1 à t_2. Pour ceci nous allons extraire dv de l'équation précédente et intégrer entre t_1 à t_2. Si nous appelons v_1 la vitesse au temps t_1 et v_2 la vitesse au temps t_2 nous obtenons:

$$dv = a\,dt$$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \tag{1.2}$$

Pour calculer l'intégrale de droite il faut connaître l'expression mathématique de a en fonction du temps. Le cas le plus simple est celui du **mouvement uniformément accéléré**. Dans ce cas, a est constante et nous pouvons sortir a du signe intégral et intégrer directement:

$$v_2 - v_1 = a \int_{t_1}^{t_2} dt = a\,(t_2 - t_1)$$

qui peut aussi s'écrire (si on préfère):

$$v_2 = v_1 + a\,\Delta t$$

qui se lit: "la nouvelle vitesse est égale à l'ancienne plus l'accélération par l'intervalle de temps".

Il est très important de faire remarquer que, même dans le cas le plus simple, celui du mouvement uniformément accéléré, la vitesse peut être positive ou négative suivant que le corps se déplace vers la droite ou vers la gauche. De même l'accélération peut être positive ou négative indépendamment du signe de la vitesse. Les quatre combinaisons sont possibles et les formules que nous venons de déduire sont valables pour les quatre cas.

Il est peut-être utile de signaler qu'une accélération positive augmente la vitesse vers la droite. Mais augmenter la vitesse vers la droite a pour conséquence d'augmenter (en valeur absolue) les vitesses positives et de diminuer (en valeur absolue) les vitesses négatives.

Vice-versa, une accélération négative augmente la vitesse vers la gauche. C'est-à-dire, augmente (en valeur absolue) les vitesses négatives et diminue (en valeur absolue) les vitesses positives.

Parfois on ne connaît pas l'accélération en fonction du temps mais on la connaît en fonction de la position x. Dans ce cas on peut calculer la vitesse en fonction de la position. Pour le faire nous allons multiplier les relations:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

et

$$dv = a\,dt$$

ce qui nous donne:

$$v\,dv = a\frac{dx}{dt}dt = a\,dx$$

et nous allons intégrer entre la situation de départ v_1 et x_1 et la situation finale v_2 et x_2:

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \int_{x_1}^{x_2} a\,dx$$

ce qui nous donne:

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 - \tfrac{1}{2}v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} a\,dx \tag{1.3}$$

Ceci nous donne la vitesse en fonction de la position. À partir de cette relation on peut trouver la relation entre la position et le temps. On connaît $v(x)$ (vitesse en fonction de la position). De la définition de vitesse:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

nous pouvons écrire:

$$dt = \frac{dx}{v}$$

Si nous intégrons entre la situation de départ t_1 et x_1 et celle d'arrivée t_2 et x_2 nous obtenons:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v(x)}$$

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v(x)}$$

Ceci nous donne une expression avec le temps à gauche et la position à droite. Avec un peu de chance on peut exprimer la position x en fonction du temps et calculer, au besoin, la vitesse en fonction du temps.

1.4 Mouvement uniformément accéléré.

Comme nous venons de l'écrire, le mouvement uniformément accéléré est celui pour lequel l'accélération est constante (indépendante du temps).

Nous avons déjà calculé la vitesse en fonction du temps:

$$v_2 = v_1 + a\,\Delta t$$

Nous pouvons ré-écrire cette équation en remplaçant v_2 par v et t_2 par t. Ainsi la formule nous donne la vitesse v au temps t pour la condition initiale $v = v_1$ pour $t = t_1$:

$$v = v_1 + a\,(t - t_1)$$

Nous avions aussi trouvé que l'espace parcouru était (Eq. 1.1):

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

dans cette formule nous remplaçons v par la valeur que nous venons de calculer:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} (v_1 + a\,(t - t_1))\,dt$$

d'où

$$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} a\,t\,dt - \int_{t_1}^{t_2} a\,t_1\,dt$$

$$x_2 = x_1 + v_1\,(t_2 - t_1) - a\,t_1\,(t_2 - t_1) + \tfrac{1}{2}a\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

$$x_2 = x_1 + v_1\,(t_2 - t_1) - \tfrac{1}{2}a\,(t_2 - t_1)^2 \tag{1.4}$$

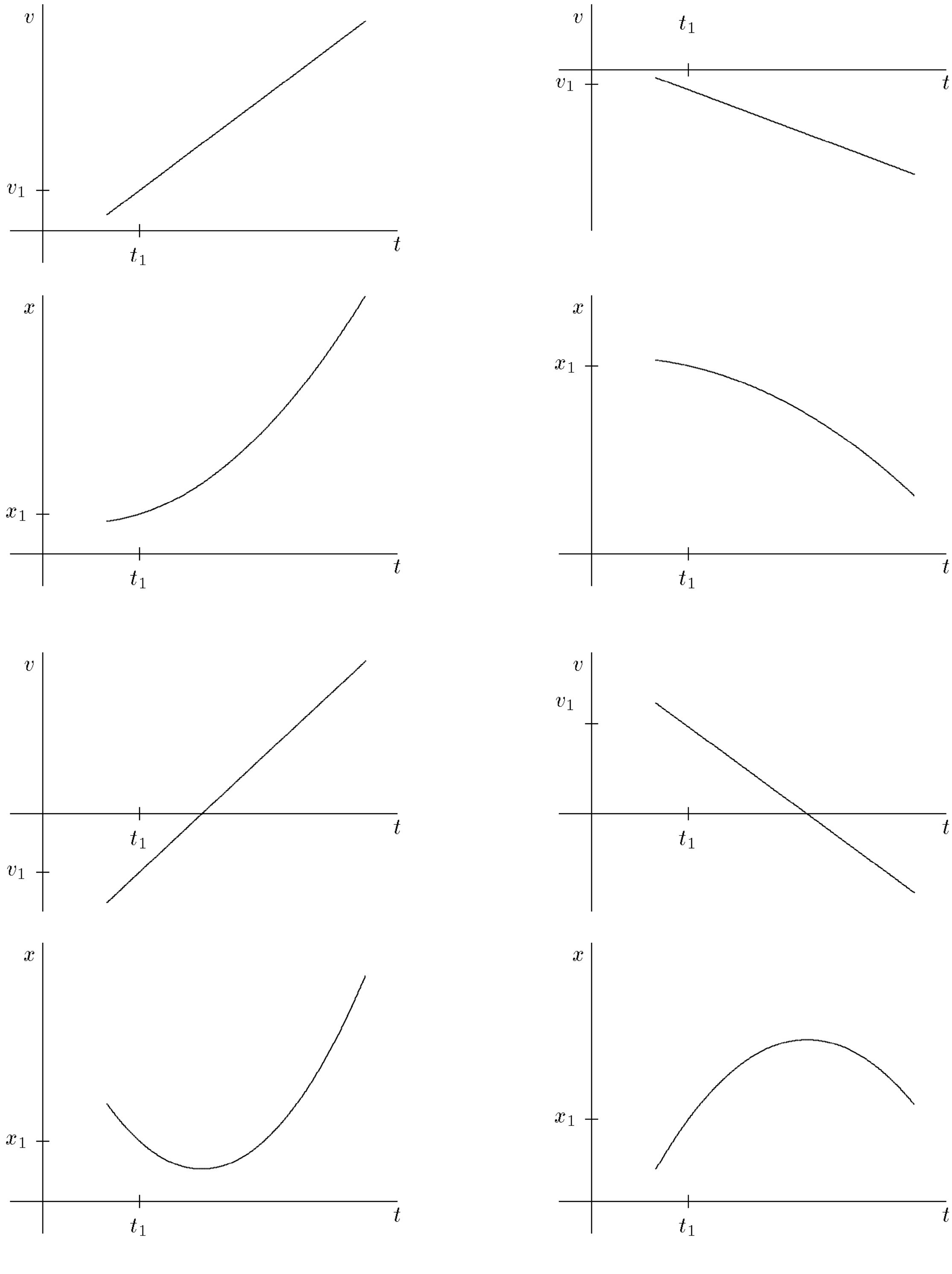


Figure 1.3 Évolution de la vitesse et de l'espace parcouru dans un mouvement uniformément accéléré. En haut à gauche la vitesse initiale est positive et l'accélération est positive. La vitesse augmente linéairement et l'espace est parcouru de plus en plus vite. En haut à droite la situation est symétrique: la vitesse initiale est négative et l'accélération est aussi négative. La vitesse devient de plus en plus négative et la position de l'objet devient de moins en moins positive et deviendra négative. En bas à gauche la vitesse initiale est négative mais l'accélération est positive. La vitesse devient de moins en moins négative, passe par zéro puis devient de plus en plus positive. La position diminue jusqu'à ce que la vitesse devienne positive puis la position devient de plus en plus positive comme en haut à gauche. En bas à droite la vitesse initiale est positive mais l'accélération est négative. La vitesse devient de moins en moins positive, passe par zéro puis devient de plus en plus négative. La position avance de plus en plus lentement puis se met à reculer vers les x négatifs, comme en haut à droite.

Si nous avons la possibilité de déclencher le chronomètre à l'instant t_1, dans cette formule tous les t_1 sont remplacés par zéro et la formule devient plus sympathique:

$$x_2 = x_1 + v_1 t_2 + \tfrac{1}{2} a\, t_2^2 \tag{1.5}$$

1.4.1 Corps en chute libre.

L'exemple le plus courant de mouvement uniformément accéléré est celui des corps en chute libre. Tous les corps sont attirés vers le centre de la terre et si on les laisse libres (sans exercer des forces sur eux) l'attraction de la terre accélère ces corps de façon constante (si on néglige la résistance de l'air) avec une accélération qui vaut 9,80665 $mètres/seconde^2$ dans nos contrées. Cette accélération due à la gravité reçoit le nom d'**accélération de gravité** et est représentée souvent par la lettre **g**. Nous reviendrons plus loin sur les raisons de cette accélération constante.

Exemple 1.1 Départ arrêté.

On laisse tomber un objet d'une hauteur de 10 $mètres$. Calculer le temps de la chute et la vitesse au moment de l'impact au sol.

La vitesse initiale est nulle ($v_1 = 0$). Nous sommes libres de commencer à mesurer le temps à l'instant où on lâche l'objet. Donc $t_1 = 0$. De plus nous pouvons choisir la droite du mouvement vertical, placer l'origine des X à l'endroit où on lâche l'objet ($x_1 = 0$) et choisir le sens positif des X, vers le bas. Avec tous ces choix, l'équation 1.5 devient:

$$x_2 = \tfrac{1}{2} g\, t_2^2$$

Nous cherchons la valeur de t_2 pour laquelle l'objet a chuté de 10 $mètres$ c'est-à-dire pour laquelle $x_2 = 10$:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2x_2}{g}} = \sqrt{\frac{20}{9{,}81}} = 1{,}427\ldots s$$

La vitesse atteinte sera:

$$v_2 = g\, t_2 = g\sqrt{\frac{2x_2}{g}} = \sqrt{2g\, x_2} = 14{,}0\ldots m/s$$

Exemple 1.2 Lancé vers le haut.

On lance un objet vers le haut avec une vitesse initiale de 30 m/s. Calculer la hauteur maximale atteinte et le temps pour l'atteindre.

Cette fois nous choisissons aussi de déclencher le chronomètre à l'instant de départ ($t_1 = 0$). L'axe des X sera vertical avec le sens croissant vers le haut et l'origine à l'endroit de départ ($x_1 = 0$).

La vitesse est positive mais elle décroît car l'objet est freiné par l'attraction de la terre. L'accélération est donc négative ($-g$). L'objet arrive au sommet de sa course quand sa vitesse s'arrête d'être positive (vers le haut) pour devenir négative (vers le bas). À ce moment précis, la vitesse est nulle.

$$0 = v_2 = v_1 - g t_2$$

$$t_2 = \frac{v_1}{g} = \frac{30}{9{,}81} = 3{,}058\ldots s$$

La distance parcourue sera:

$$x_2 = v_1 t_2 - \tfrac{1}{2} g\, t_2^2 = \tfrac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} = 45{,}87\ldots m$$

Exemple 1.3 Une seconde de chute.

Calculer de quelle hauteur faut-il laisser tomber un objet pour que la chute dure exactement 1 seconde. Calculer la vitesse d'impact.

Nous choisissons à nouveau $t_1 = 0$. L'axe de X vers le bas et $x_1 = 0$ au point de départ.

t_2 doit être égal à 1 seconde:

$$x_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 = \frac{1}{2} 9{,}81 \cdot 1 = 4{,}905\, m$$

La vitesse finale sera:

$$v_2 = g\, t_2 = 9{,}81\, m/s$$

ce qui n'est pas surprenant: la valeur de l'accélération due à la gravité indique que l'objet augmente sa vitesse de $9{,}81\, m/s$ à chaque seconde de chute.

1.4.2 Quelques cas particuliers.

On laisse au lecteur la démonstration des cas particuliers qui suivent. Dans tous les cas l'accélération ou la décélération sont constantes. Le temps initial est zéro ($t_1 = 0$) et la vitesse initiale ou la vitesse finale sont nulles.

Cas particuliers avec accélération constante.	
Temps que met un objet, initialement au repos, pour parcourir une distance d sous une accélération a.	$t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$
Temps que met un objet, initialement au repos, pour tomber d'une hauteur h sous l'accélération de gravité g.	$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
Vitesse acquise par un objet soumis à une accélération a pendant une distance d.	$v = \sqrt{2ad}$
Vitesse acquise par un objet qui tombe d'une hauteur h sous l'accélération de gravité g.	$v = \sqrt{2gh}$
Distance parcourue par un objet avec une vitesse initiale v soumis à une accélération négative $-a$ (avec $a > 0$) jusqu'à ce que la vitesse s'annule.	$d = \frac{v^2}{2a}$
Hauteur atteinte par un objet lancé vers le haut avec une vitesse verticale v soumis à l'accélération de gravité g.	$h = \frac{v^2}{2g}$
Temps mis pour s'arrêter par un objet avec vitesse initiale v soumis à une accélération négative $-a$.	$t = \frac{v}{a}$
Temps mis pour atteindre le sommet par un objet lancé vers le haut avec vitesse verticale v soumis à l'accélération de gravité g.	$t = \frac{v}{g}$
Décélération nécessaire pour arrêter un objet avec vitesse initiale v en une distance d.	$a = \frac{v^2}{2d}$
Décélération nécessaire pour arrêter un objet avec vitesse initiale v en un temps t.	$a = \frac{v}{t}$
Accélération nécessaire pour qu'un objet atteigne une vitesse v en un temps t.	$a = \frac{v}{t}$
Accélération nécessaire pour qu'un objet atteigne une vitesse v en une distance d.	$a = \frac{v^2}{2d}$
Accélération nécessaire pour qu'un objet parcoure une distance d en un temps t.	$a = \frac{2d}{t^2}$

1.5 Exercices.

1 - Les mesures effectuées par "Auto Plus" (2 janvier 2001) sur les voitures récentes donnent les distances de freinage suivantes (voitures neuves en bon état) 35 m à 90 km/h et 70 m à 130 km/h. En déduire la décélération moyenne maximale des véhicules récents.
R.N.: $a \simeq 9\,m/s^2$

2 - Quand deux véhicules se suivent, il faut respecter une distance de sécurité. Si le premier véhicule freine, le conducteur suivant met une seconde pour réaliser qu'il doit freiner aussi et appuyer sur la pédale de frein. Dans tout ce qui suit on suppose que les véhicules ont des freins identiques en bon état qui permettent d'obtenir une décélération de $9\,m/s^2$ et que les conducteurs sont vigilants et regardent devant eux.

a - Le premier véhicule a vu un obstacle (un sanglier qui traverse la route par exemple) et freine au maximum. Quelle doit-être la distance minimale entre le 1^{er} et le 2^{nd} véhicule qui le suit à la même vitesse initiale V_0 pour qu'il n'y ait pas choc ? A.N: $V_0 = 50,\ 90,\ 110,\ 130\,km/h$
R.N.: $13{,}9\,m$, $25{,}0\,m$, $30{,}6\,m$, $36{,}1\,m$,

b - En supposant que sur une route, tous les véhicules se suivent à la distance minimale de sécurité calculée en a), quel débit peut-on obtenir en véhicules/heure? (calcul approché sans tenir compte de la taille des véhicules).
R.N.: 3600 v/h

3 - Vous roulez sur une route mouillée à 90 km/h imprudemment à 30 m de la voiture qui vous précède. Soudain la voiture qui vous précède freine et, comme elle est équipée d'ABS, elle décélère de $7\,m/s^2$. Avec votre voiture vous "pilez" $0{,}7s$ plus tard (temps de réaction) mais ne décélérez que de $5\,m/s^2$. Calculez le temps et la position d'impact, ainsi que la différence de vitesses.
R.N.: $t = 4{,}236\,s$ après le premier coup de frein et à $44{,}57\,m$ de l'endroit où il a eu lieu. Au moment de l'impact $\Delta v = 26{,}35\,km/h$

4 - Actuellement (2003) un aventurier de l'inutile veut dépasser la vitesse du son en chute libre en se jetant d'un ballon à 40 km de hauteur. À cette hauteur la résistance de l'air est faible. Si on néglige la résistance de l'air, calculez le temps et la distance pour atteindre une vitesse de $330\,m/s$. S'il n'y avait pas la résistance de l'air, combien de temps prendrait la chute jusqu'au sol et à quelle vitesse arriverait-il. On prendra $g = 9{,}81\,m/s^2$.
R.N.: $t = 33{,}6\,s$, $d = 5550\,m$, $t_t = 90{,}3$, $v = 886\,m/s$.

5 - Si on admet que tout conducteur doit "piler" dès que le feu passe du vert à l'orange et, qu'en "pilant", la décélération est de $9\,m/s^2$, calculez la durée minimale du feu orange pour qu'un automobiliste roulant à 50 km/h s'arrête avant que le feu passe au rouge.
R.N.: $1{,}54\,s$ sans compter le temps de réaction.

6 - Calculez le rapport de vitesses entre un jet (900 km/h) et un bébé qui marche à quatre pattes (estimez vous même sa vitesse).
R.N.:

7 - Vous roulez 50 m derrière un poids lourd à 80 km/h. Finalement vous arrivez à un morceau de route où vous pouvez le doubler. Si votre voiture peut accélérer de $\frac{1}{10}g$ (g étant l'accélération de gravité), combien de temps mettrez-vous pour arriver à la hauteur du camion? Quelle distance aurez vous parcouru?
R.N.: $10{,}1\,s$, $274\,m$

2. MOUVEMENT DANS UN PLAN.

Pour décrire le mouvement d'un objet dans un plan nous avons besoin d'un système de 2 coordonnées, que nous appellerons x et y.

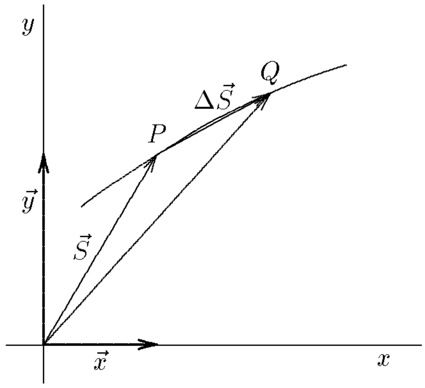


Figure 2.1 La position de l'objet le long de la trajectoire peut être décrite par le vecteur $\vec{S}$, et le déplacement entre les points P et Q, par le vecteur $\Delta\vec{S}$.

Considérons un objet qui se déplace suivant une trajectoire comme celle dessinée dans la figure 2.1. La position de l'objet au point P est donnée par les coordonnées du point P ou, ce qui revient au même, par le vecteur $\vec{S}$ dont les composantes sont x et y.

On peut aussi appeler $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de longueur x et y et parallèles aux axes de coordonnées x et y respectivement. Avec cette convention:

$$\vec{S} = \vec{x} + \vec{y}$$

Quand l'objet se déplace jusqu'au point Q, on peut décrire ce déplacement par le vecteur $\Delta\vec{S}$. Si ce déplacement s'est fait dans un temps Δt, on peut définir une vitesse moyenne de l'objet comme:

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}$$

remarquez que, comme le vecteur ΔS est un vecteur "distance" avec des mètres pour unités, les unités du vecteur $\vec{v}_{moy}$ seront aussi des $mètres/seconde$.

Si maintenant nous faisons tendre le point Q vers le point P, nous pouvons définir une vitesse instantanée:

$$\vec{v} = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Cette vitesse est une grandeur vectorielle, toujours mesurée en $mètres/seconde$, dont les composantes sont:

$$\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{v}_y = \frac{d\vec{y}}{dt}$$

Remarquez que le vecteur vitesse instantanée est toujours tangent à la trajectoire.

Les déplacements et les vitesses en x et y de l'objet sont indépendants. On peut donc calculer les vitesses et les positions en x et en y séparément puis, au besoin, calculer $\vec{v}$ en additionnant vectoriellement $\vec{v}_x$ et $\vec{v}_y$.

2.1 Mouvement dans un plan avec accélération.

L'accélération est égale à la variation de vitesse divisée par la variation de temps. Si notre vitesse est vectorielle, nous pouvons l'exprimer comme somme de deux composantes orthogonales ($\vec{v}_x$ et $\vec{v}_y$). L'accélération sera la dérivée de la vitesse:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_x + d\vec{v}_y}{dt} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

On peut décomposer l'accélération dans ses deux composantes.

L'utilité de ceci est que, pour traiter un mouvement dans un plan on peut traiter les deux composantes séparément: d'un côté la position, la vitesse et l'accélération en x et de l'autre la position, la vitesse et l'accélération en y. Bien sur, il ne faut pas oublier que l'accélération dans la direction x peut dépendre de la position en y et que l'accélération dans la direction y peut dépendre de la position en x.

Quand il s'agit d'un mouvement rectiligne, la vitesse est toujours parallèle à la droite du mouvement et l'accélération, qui a la direction d'une différence de vitesses, a nécessairement la même direction.

Par contre, dans un mouvement curviligne, la vitesse peut changer non seulement en module mais aussi en direction. Dans ce cas, la différence de vitesses (et donc l'accélération) n'a pas toujours la même direction que la vitesse. Nous verrons des exemples de cette situation plus loin.

2.2 Mouvement d'un projectile.

Quand nous lançons un projectile dans une direction quelconque, il va se déplacer horizontalement et verticalement simultanément. Si on néglige la résistance de l'air, le projectile ne subit aucune accélération dans la direction horizontale. Par contre il subit l'accélération de gravité dans le sens vertical. Même si nous l'avons lancé vers le haut, il finira par retomber.

Choisissons notre système de coordonnées avec x horizontal et y vertical et situons l'origine à l'endroit du lancement.

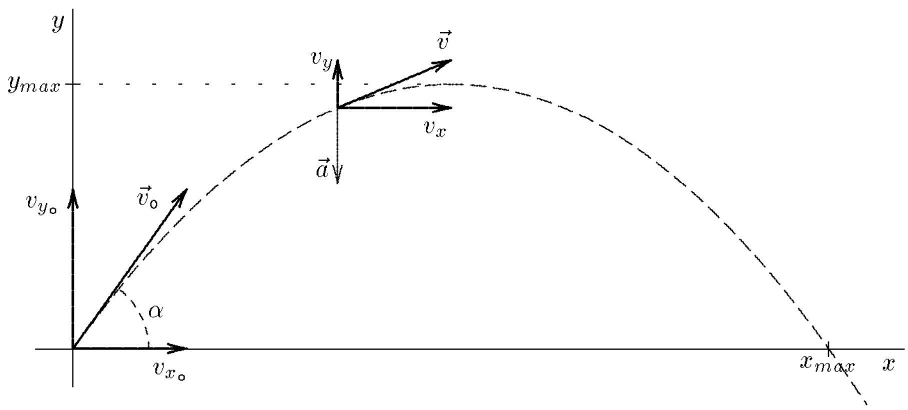


Figure 2.2 Trajectoire d'un projectile. La vitesse horizontale ne change pas. Par contre la vitesse verticale diminue puis s'inverse. L'accélération $\vec{a}$ est constante et toujours dirigée vers le bas.

Si la vitesse de lancement est v_o et que sa direction fait un angle α avec l'horizontale, ses composantes en x et y seront:

$$v_{x_o} = v_o \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_{y_o} = v_o \sin\alpha$$

La vitesse horizontale ne changera pas avec le temps. Par contre la vitesse verticale diminuera du fait de l'accélération de gravité:

$$v_x = v_{x_\circ}$$
$$v_y = v_{y_\circ} - g\,t$$

Les positions seront:

$$x = v_{x_\circ} t$$
$$y = v_{y_\circ} t - \tfrac{1}{2} g\, t^2$$

Pour calculer la forme de la trajectoire il faut éliminer le temps de ces deux équations:

$$t = \frac{x}{v_{x_\circ}}$$
$$y = v_{y_\circ} \frac{x}{v_{x_\circ}} - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{x_\circ}} \right)^2$$
$$y = \frac{v_{y_\circ}}{v_{x_\circ}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x_\circ}^2} x^2$$

La trajectoire est une parabole. Pour trouver l'endroit de chute du projectile, si l'on suppose le terrain horizontal, il suffit de trouver les valeurs de x pour lesquels $y = 0$. La première solution est évidente: il s'agit du point de départ avec x et y égales à zéro. Pour trouver la seconde solution (avec $x \neq 0$), il suffit de diviser par x:

$$0 = \frac{v_{y_\circ}}{v_{x_\circ}} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x_\circ}^2} x$$

on déduit

$$x_{max} = 2 \frac{\frac{v_{y_\circ}}{v_{x_\circ}}}{\frac{g}{v_{x_\circ}^2}} = \frac{2 v_{x_\circ} v_{y_\circ}}{g}$$

On peut calculer l'angle α pour lequel le projectile tombe le plus loin (pour la même vitesse). On remplace $v_{x_\circ}$ et $v_{y_\circ}$ par leur relation avec $v_\circ$ et α:

$$x_{max} = \frac{2 v_{x_\circ} v_{y_\circ}}{g} = \frac{v_\circ^2}{g} 2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_\circ^2}{g} 2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_\circ^2}{g} \sin(2\alpha)$$

Le projectile tombe au plus loin quand $\sin(2\alpha) = 1$ c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Exemple 2.1 La grosse Bertha. Pendant la guerre 14-18 les allemands construisirent un énorme canon pour bombarder Paris situé à plus de $100\,km$ du front. Les parisiens le baptisèrent "Bertha" du nom de la fille de Krupp, le fabricant du canon. Calculons la vitesse initiale du projectile pour qu'il puisse atteindre $110\,km$.

Nous avons vu que la portée maximale s'obtient pour un angle de lancement de $\frac{\pi}{4}$. Si la vitesse initiale est $v_\circ$ nous aurons:

$$110\,km = 11 \cdot 10^4 = x_{max} = \frac{v_\circ^2}{g} \sin(2\alpha) = \frac{v_\circ^2}{g}$$

d'où:

$$v_\circ = \sqrt{g \cdot 11 \cdot 10^4} = \sqrt{9{,}81 \cdot 11 \cdot 10^4} \simeq 1039\, m/s$$

Cette vitesse est trois fois la vitesse du son. On déduit le temps pour atteindre le sommet de la parabole de:

$$v_y = v_{y_\circ} - g\,t$$

Comme la vitesse verticale v_y est zéro au sommet de la parabole,

$$t_s = \frac{v_{y_\circ}}{g} = \frac{v_\circ \sin(\pi/4)}{g} = \frac{1039 \cdot 0{,}707}{9{,}81} \simeq 74{,}9\, s$$

À partir du sommet de la trajectoire le temps de chute est le même. Le temps total de vol sera donc, $\sim$ 150 secondes. On peut le vérifier en calculant le temps à partir de la vitesse horizontale ($v_{x_o} = 734{,}7\,m/s$) et de la distance parcourue ($110\,km$):

$$t_t = \frac{11 \cdot 10^4}{v_{x_o}} = \frac{11 \cdot 10^4}{734{,}7} = 149{,}7\,s$$

Le projectile atteint sa hauteur maximale y_{max} au bout de $t_s = 74{,}9\,s$:

$$y_{max} = v_{y_o} t_s - \tfrac{1}{2} g\, t_s^2 = 734{,}7 \cdot 74{,}9 - \tfrac{1}{2} 9{,}81 \cdot 74{,}9^2 \simeq 27{,}5\,km$$

La majeure partie de la trajectoire se situait au dessus des couches denses de l'atmosphère. Pourtant, l'effet de la résistance de l'air était loin d'être négligeable. La vraie vitesse initiale du projectile n'était pas de $1039\,m/s$ mais de $1600\,m/s$ et la hauteur maximale de la trajectoire était de $38\,km$. L'angle de tir était supérieur à $\frac{\pi}{4}$.

2.3 Mouvement circulaire uniforme.

2.3.1 Vitesses tangentielle et angulaire.

Considérons un objet dont la trajectoire est un cercle de rayon r. Sa vitesse V_T est toujours tangentielle au cercle et perpendiculaire au rayon. Pour cette raison elle s'appelle **vitesse tangentielle**.

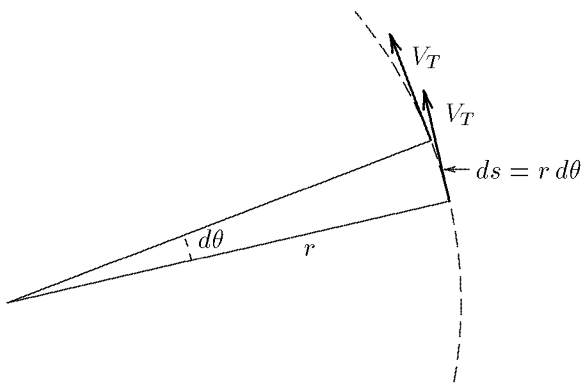


Figure 2.3 Pendant l'intervalle de temps dt, l'objet parcourt une longueur d'arc de cercle $ds = r\,d\theta$.

Pendant un court intervalle de temps dt l'objet aura parcouru une distance:

$$ds = V_T dt$$

et l'angle du rayon qui le relie au centre du cercle aura changé de $d\theta$. L'arc et l'angle sont reliés par la relation:

$$ds = r\,d\theta$$

La **vitesse angulaire** ω est définie comme le taux temporel de changement de l'angle θ:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_T}{r}$$

elle se mesure en *radians/seconde*. Il est évident qu'une vitesse de rotation d'un tour par seconde correspond à une vitesse de 6,28 . . . *radians/seconde*.

On appelle **mouvement circulaire uniforme** un mouvement circulaire dont la vitesse angulaire est constante (ne dépend pas du temps). Il est évident que dans ce cas la vitesse tangentielle est aussi constante.

On associe la vitesse angulaire à un **vecteur vitesse angulaire**. Il s'agit d'un vecteur de module égal à la valeur de la vitesse angulaire et dont la direction est parallèle à l'axe de rotation. La direction du vecteur est celle de la "règle du tire-bouchon". Quand vous tournez votre volant vers la droite (pour tourner à droite) le vecteur vitesse angulaire du volant a la direction de la barre de direction et est dirigé vers l'avant. Si vous tournez à gauche le vecteur vitesse angulaire se dirige vers vous. Vous devez éviter que le vecteur vitesse angulaire de votre voiture soit horizontal.

2.3.2 Accélération.

Dans un mouvement circulaire uniforme la vitesse tangentielle reste constante en module mais change de direction en permanence. Un changement de vitesse implique une accélération: nous allons la calculer.

Dans la figure 2.4 nous avons représenté la position et la vitesse de l'objet à deux instants séparés de dt (comme d'habitude nous avons choisi un sens de rotation positif: sens de rotation du volant pour tourner à gauche). Pendant ce court intervalle l'angle aura changé de $d\theta$. Pour calculer l'accélération nous avons besoin de calculer le changement de vitesse $d\vec{V_T}$ et pour cela, faire la différence entre la vitesse à la fin de l'intervalle et la vitesse au début de l'intervalle. Pour bien voir la différence nous avons copié en pointillés la vitesse initiale avec la même origine que la vitesse finale.

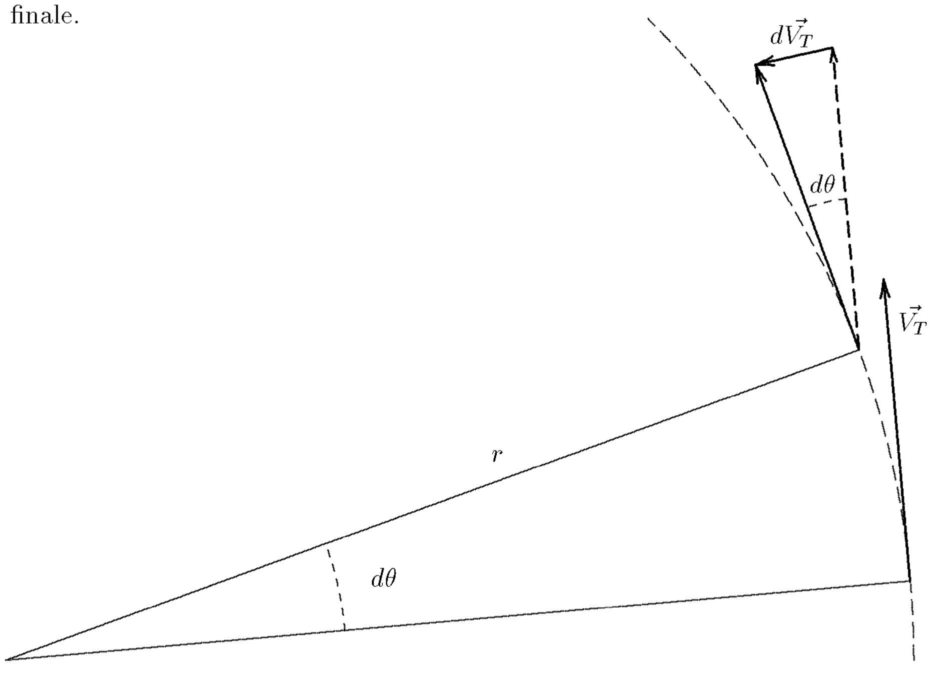


Figure 2.4 Pendant l'intervalle de temps dt, la direction de la vitesse a changée d'un angle $d\theta$. Cela correspond à un changement de vitesse dV_T.

On voit que la différence de vitesses est le vecteur qui va de la pointe du vecteur vitesse de départ à la pointe du vecteur vitesse finale (voir la figure 2.4). Ce vecteur différence est perpendiculaire aux vitesses (n'oubliez pas que $d\theta$ est très petit). Il est donc, parallèle au rayon et il pointe vers le centre du cercle. L'accélération sera le résultat de diviser ce vecteur par l'intervalle de temps. Comme la vitesse est toujours tangentielle, l'angle entre les deux vitesses est le même que celui entre les deux rayons c'est-à-dire $d\theta$. La longueur du vecteur $d\vec{V_T}$ sera:

$$dV_T = V_T d\theta$$

La longueur de l'arc parcourue par le point est:

$$r\, d\theta = V_T dt$$

On sort $d\theta$ de cette équation pour calculer l'accélération:

$$a = \frac{dV_T}{dt} = \frac{V_T\, d\theta}{dt} = \frac{V_T^2 dt}{r\, dt} = \frac{V_T^2}{r}$$

L'accélération est un vecteur de module constant mais qui pointe toujours vers le centre du cercle et qui tourne donc en permanence avec l'objet, dans le même sens et à la même vitesse angulaire.

Exemple 2.1 Accélération à l'équateur. Calculons l'accélération que doit subir un objet placé sur l'équateur de la terre pour rester à la surface. Le périmètre de la terre est de $40\,000\, km$ et sa vitesse de rotation est de 1 tour/jour. La vitesse tangentielle est:

$$V_T = \frac{4 \cdot 10^7}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 462{,}9\, m/s$$

l'accélération est:

$$a = \frac{V_T^2}{r} = \frac{462{,}9^2}{6{,}366 \cdot 10^6} = 0{,}0337\, m/s^2$$

Ce qui est bien inférieur à l'accélération de gravité. Pour que l'accélération de gravité corresponde exactement à l'accélération pour garder l'objet sur l'équateur il faudrait que la terre tourne $\sqrt{9{,}81/0{,}0337} \simeq 17$ fois plus vite. La terre devrait tourner en $24/17 = 1{,}41$ heures (1h 25mn). Si la terre tournait encore plus vite (en moins de 1h25) l'accélération de gravité ne suffirait plus à maintenir les objets sur l'équateur et il faudrait aller vivre plus près des pôles.

Exemple 2.2 Le TGV dans une courbe.

Calculons l'accélération centripète que les rails donnent au TGV quand il prend un virage de rayon $6\, km$ (le plus petit rayon des virages du TGV), à $350\, km/h$.

Commençons par convertir les $350\, km/h$ au S.I.:

$$V_T = \frac{350 \cdot 10^3}{3600} = 97{,}22\, m/s$$

L'accélération centripète est:

$$a = \frac{V_T^2}{r} = \frac{97{,}22^2}{6000} = 1{,}575\, m/s^2$$

Cette accélération est égale à 16% de l'accélération de gravité. Pour que les voyageurs puissent avoir cette accélération il faudrait qu'il subissent une force égale à 16% de leur poids en se tenant au wagon. Les voyageurs debout ont une autre alternative: se pencher vers l'intérieur du virage avec un angle de 9°. Pour leur éviter ça, la SNCF incline la voie ferrée vers l'intérieur du virage de sorte que c'est tout le wagon qui est incliné vers l'intérieur.

Exemple 2.3 Accélération centripète sur le bord d'un CD.

Calculons l'accélération centripète sur la périphérie d'un CD qui tourne à 3600 tours/min (il y en a de plus rapides). Le diamètre d'un CD est $12\, cm$.

On peut calculer directement l'accélération centripète, tout en convertissant les tours/min en rad/sec:

$$a = r\omega^2 = 0{,}06 \left(\frac{2\pi\, 3600}{60}\right)^2 = 8527{,}3\, m/s^2$$

Cette accélération est 869 fois plus grande que l'accélération de gravité. Cette accélération est donnée par les forces exercées sur les morceaux périphériques du disque par des morceaux plus internes. Le plastique des CD est très résistant.

2.4 Mouvement circulaire non uniforme.

Dans le chapitre précédent la vitesse tangentielle (et angulaire) restait constante en module. Ce n'est pas le cas général. La vitesse tangentielle en plus de changer de direction peut aussi changer en module. Nous avons vu que l'accélération qui maintient un objet en mouvement circulaire uniforme est constante, dirigée vers le centre de rotation et perpendiculaire à la vitesse tangentielle. Pour changer le module de la vitesse tangentielle il faut ajouter une autre composante à l'accélération, et cette composante est tangentielle. Dans le cas général l'accélération est un vecteur qui peut être décomposé en deux composantes: une centripète (vers le centre de rotation) et de valeur V_T^2/r plus une autre tangentielle. Si l'accélération tangentielle a la même direction que la vitesse, celle-ci augmente. Dans le cas contraire elle diminue.

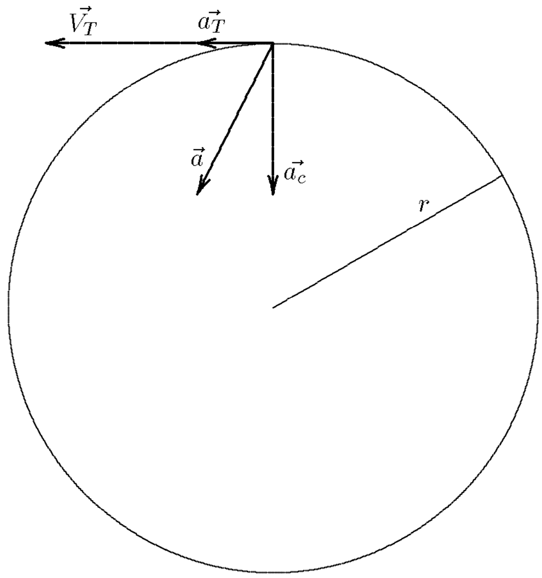


Figure 2.5 Dans un mouvement circulaire non uniforme l'accélération totale est la somme de l'accélération centripète $a_c = V_T^2/r$ plus une accélération tangentielle a_T. L'accélération totale $\vec{a}$ n'est plus dirigée vers le centre de rotation.

2.5 Vitesse relative.

Imaginez une mouche qui vole à l'intérieur d'un car qui se déplace. Ce paragraphe concerne la relation entre la vitesse de la mouche par rapport au car (ou par rapport à un observateur dans le car) et la vitesse de la mouche par rapport à un observateur immobile à terre.

Comme nous parlons de vitesse relative, il faut dire un mot à propos de la Théorie de la Relativité d'Einstein. Ce que nous disons est que nous n'en parlerons pas. Depuis Galilée (vers 1600) et jusqu'à Einstein (vers 1900) on a utilisé une transformation linéaire simple:

"La vitesse de la mouche par rapport à l'observateur à terre est égale à la vitesse du car par rapport à l'observateur à terre plus la vitesse de la mouche par rapport au car."

Dans cette règle les vitesses et les additions sont vectorielles.

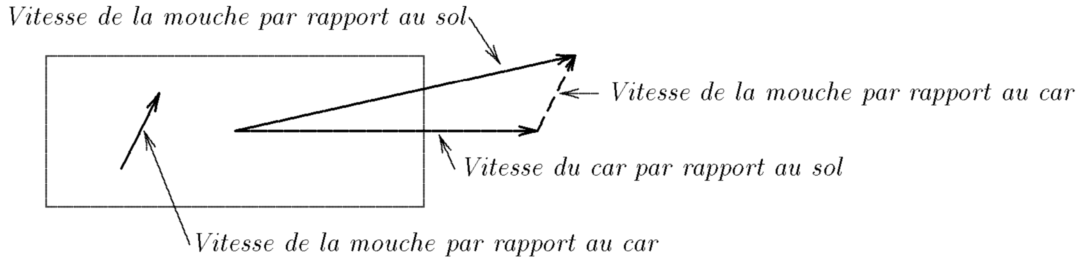


Figure 2.6 La vitesse de la mouche et celle du car s'additionnent vectoriellement.

Vers la dernière moitié du $19^{ème}$ siècle on s'aperçut que cette règle ne donnait pas de bons résultats pour des vitesses proches de la vitesse de la lumière. En particulier la vitesse de la lumière mesurée par le voyageur du car et par l'observateur à terre était strictement la même. Et ceci même si la vitesse du car était proche de celle de la lumière.

Plusieurs théories et explications furent données, mais celle qui emporta l'approbation de la majorité fut celle de la Relativité d'Einstein. Elle expliqua presque tous les résultats des expériences et prédit un certain nombre de phénomènes qui furent observés. Actuellement, bien que l'on continue à l'appeler *théorie*, personne ne met en doute sa validité.

Dans le cadre de la Théorie de la Relativité la transformation des vitesses n'est pas linéaire et la vitesse de la mouche mesurée par l'observateur à terre n'est pas la même que celle mesurée par un observateur sur le car (la vitesse est relative, d'où le nom de la théorie). Les transformations sont telles que, à des vitesses faibles comparées avec celle de la lumière ($3\ 10^8\, m/s$), elles coïncident avec les transformations linéaires classiques. À l'autre extrémité, la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs.

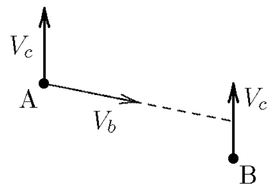
Heureusement pour nous, les vitesses avec lesquelles nous allons travailler sont très petites comparées à celle de la lumière ($3\ 10^8\, m/s$) et les transformations linéaires exprimées par la phrase plus haut, restent parfaitement valables: la vitesse de la mouche et celle du car s'additionnent.

2.6 Exercices.

1 - Une lanceuse de marteau lance son engin (de $4\,kg$) à $70\,m$. En admettant que l'angle de lancement est optimal, calculez la vitesse de départ du marteau. Donnez aussi son équivalent en km/h pour mieux fixer les idées. Si le rayon de rotation du marteau (longueur de l'attache plus les bras de la lanceuse) fait $1{,}90\,m$, calculez l'accélération centripète du marteau juste avant le lancer. Comparez cette accélération à l'accélération de gravité.
R.N.: 26,2 m/s, 361 m/s^2.

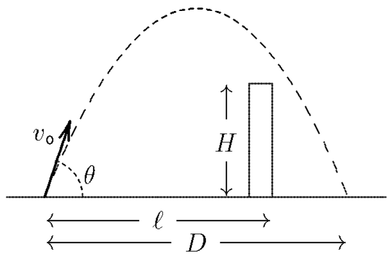
2 - Pour son atterrissage, un certain avion doit avoir une vitesse de $200\,km/h$ par rapport à l'air. La piste est orientée vers l'est et un vent de $30\,km/h$ souffle vers le sud. Comme la direction du déplacement de l'avion au moment de l'atterrissage doit être égale à celle de la piste (plein est), donnez l'orientation de l'avion ainsi que sa vitesse par rapport à la piste.
R.N.: 81,4° par rapport au nord, $197{,}7\,km/h$

3 - Le joueur de rugby A court avec la balle avec une vitesse $V_c = 6\,m/s$. Le joueur B le suit à la même vitesse $2\,m$ en arrière et $4\,m$ à sa droite. Le joueur A fait une passe à B en lui lançant la balle avec une vitesse $V_b = 12\,m/s$ par rapport à lui même. Dans le référentiel des deux coureurs, la balle est dirigée directement vers le coureur B. Dans le référentiel du terrain la direction est telle que le joueur B et la balle arriveront simultanément au point d'intersection de leurs trajectoires. Est-ce que le joueur A a fait un "en avant"? (Ou: est-ce que, par rapport au terrain, la vitesse de la balle comporte une composante positive vers l'avant?)
R.N.: Oui. La balle avance de $0{,}23\,m$ et a une vitesse de $\simeq 0{,}63\,m/s$ vers l'avant.



4 - Un B52 volant horizontalement à $900\,km/h$ et $5000\,m$ de hauteur veut atteindre un objectif au sol. En négligeant la résistance de l'air, calculez combien de temps avant le survol doit s'effectuer le largage? À quelle distance (horizontale) de l'objectif se trouve l'avion?
R.N.: $31{,}9\,s$, $7982\,m$.

5 - Une catapulte envoi des pierres avec une vitesse $v_\circ = 45\,m/s$. Calculez l'angle de tir pour atteindre un objectif situé à $D = 100\,m$ de la catapulte. Est-ce que le projectile évite le mur d'enceinte d'une hauteur $H = 35\,m$ situé à une distance $\ell = 75\,m$ de la catapulte?
Nota: Souvent les équations trigonométriques ont des solutions multiples. Il faut sélectionner la bonne.
R.N.: 75,5°



3. LOIS DE NEWTON, FORCE et MASSE.

Jusqu'à Galilée([1]) le monde était convaincu qu'il fallait une force pour qu'un objet reste en mouvement. Cela correspondait à l'expérience courante qu'un objet poussé à glisser ou rouler sur une surface horizontale finit par s'arrêter à cause des frottements. Cela impliquait aussi que pour maintenir en mouvement les planètes (et le Soleil qui, à cette époque, tournait autour de la terre) il fallait une force ou une volonté, sans doute divine. Galilée s'aperçu que la vitesse à laquelle s'arrêtait de glisser un objet dépendait de la qualité des surfaces, et qu'un objet poli sur une surface polie glissait plus qu'un objet rugueux. Il arriva à la conclusion que ce n'étaient pas des forces qui maintenaient l'objet en mouvement, mais que c'étaient des forces qui l'arrêtaient. C'était le principe d'inertie. Ce principe fut adopté par Newton([2]) qui l'énonça de la manière suivante dans la Première Loi de Mouvement: *"Tout corps persiste dans son état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'il ne soit forcé de changer par des forces agissant sur lui."*

Nous reviendrons plus longuement sur les Lois de Newton. Mais avant il convient de dire un mot sur ce que sont les *"Lois"* en physique. La démarche scientifique est la suivante: à partir de l'observation de la nature ou des expérimentations confirmées, on déduit une règle générale pour le type de phénomène étudié. Cette règle, si elle le mérite, s'appelle une *"théorie"*. On vérifie la validité de la *"théorie"* avec des expérimentations ou des observations supplémentaires et, surtout, on essaie d'observer les prédictions (phénomènes encore non observés) de la *"théorie"*. Si tout se passe bien, il se peut que la *"théorie"* devienne une *"Loi"*.

Il faut insister sur le fait qu'une *"Loi"* scientifique n'est pas une Vérité Absolue ou une Vérité Révélée. En sciences, une loi est seulement une règle qui décrit assez correctement une partie des phénomènes du monde dans lequel on vit. Souvent une loi n'est pas applicable dans tous les cas ni dans tous les domaines des valeurs possibles. Il arrive que, plus tard, on s'aperçoive que la loi est fausse ou partiellement fausse. Dans ce cas on peut la jeter aux orties ou l'utiliser uniquement pour les cas où l'on sait qu'elle fonctionne. Ainsi la "loi de conservation de l'énergie" est valable dans tous les cas: on n'a pas trouvé de cas où elle ne soit pas rigoureusement respectée. Par contre les lois de mouvement de Newton, dont nous allons traiter dans ce chapitre, ne sont valables que pour des vitesses très inférieures à la vitesse de la lumière. La "loi de la conservation de la matière" n'est valable que pour des phénomènes dans lesquelles il n'y a pas de transformations de masse en énergie ou réciproquement. Si le phénomène comporte ce type de transformations on utilise à sa place la "loi de conservation de l'énergie" avec l'équivalence $E = mc^2$.

Tous les scientifiques savent qu'ils ne connaissent pas la Vérité. Ils connaissent seulement des lois et des théories qui décrivent le monde dans lequel on vit et qu'ils savent qu'il faudra éventuellement modifier au fur et à mesure des nouvelles découvertes.

Parenthèse fermée. On revient aux lois de Newton. Ici on arrive à un nouveau petit problème. Il s'agit de définir ce qu'est une "force" et ce qu'est la "masse". Il est très facile de définir l'une à partir de l'autre mais plus compliqué de définir la première des deux. Parmi plusieurs possibilités, je choisis de définir chacune à partir de la déformation qu'une force (ou le poids d'une masse) crée

([1]) Galileo Galilei dit Galilée. Physicien et astronome italien. Né à Pise (1564-1642). Fondateur de la méthode expérimentale en physique. Isochronisme des pendules. Loi de la chute des corps. Principe d'inertie. Composition de vitesses. Co-inventeur de la lunette astronomique. Découvreur des satellites de Jupiter. Se rallia au système héliocentrique proposé par Copernic. Le fait que ce système était considéré hérétique par l'église et qu'il traita de benêt le pape de l'époque lui attirèrent les foudres de l'inquisition. Il dut abjurer ses thèses et passa le reste de sa vieillesse assigné à résidence. Contrairement à ce que dit la légende il ne fut pas torturé.

([2]) Sir Isaac Newton. Physicien, mathématicien, astronome et philosophe anglais. Né à Woolsthorpe (1642-1727). À mon avis, le plus grand physicien de l'histoire. Il énonça les lois de la mécanique qui expliquaient tout ce qui était connu à l'époque: depuis le mouvement des planètes et les lois de Kepler jusqu'aux marées, en passant par la chute des corps. Prédit l'aplatissement polaire de la terre. Trouva la décomposition de la lumière blanche. Inventa le télescope réflecteur. Inventa, parallèlement à Leibniz, le calcul infinitésimal. Inventa plusieurs méthodes de calcul numérique.

dans un ressort (ou un élastique). Il y a un peu de triche dans cette méthode car elle comporte des hypothèses cachées: la première est que l'on peut trouver des ressorts linéaires, c'est-à-dire, des ressorts dont l'allongement est strictement proportionnel à la force. Trouver des ressorts à peu près linéaires c'est très facile. En trouver de parfaitement linéaires c'est une autre affaire.

La deuxième hypothèse cachée est celle que le poids d'une masse, c'est-à-dire la force avec laquelle la terre attire la masse, est proportionnelle à cette dernière. C'est vrai, c'est même énoncé dans la Loi d'Attraction Universelle, mais cela peut poser des problèmes à des puristes.

Mais laissons les problèmes philosophiques aux philosophes. J'admets que les ressorts linéaires existent et ce n'est pas une petite non-linéarité qui va m'empoisonner la vie. De même, j'ai déjà lu des livres de physique et je sais que la Loi d'Attraction Universelle est valable et que le poids est proportionnel à la masse. Avec ces simplifications "philosophiques" nous pouvons définir comment mesurer une masse et une force.

3.1 Masse.

Pour mesurer la masse d'un objet on prend un ressort linéaire et on commence par mesurer l'allongement ℓ_1 produit sur le ressort quand on lui accroche l'objet appelé "kilogramme étalon" ([3]) qui se trouve au Bureau International des Poids et des Mesures à Sèvres. Puis, dans le même endroit de la terre, on mesure l'allongement ℓ_2 produit sur le ressort par l'objet que l'on veut mesurer. La masse de l'objet sera:

$$m_2 = \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot 1\, kg$$

Il faut comprendre que ceci est une manipulation qui ne sert qu'à avoir une définition. Outre les difficultés pour accéder au kilogramme étalon, il y a des objets, comme la lune ou une locomotive qui sont difficiles à accrocher à un ressort. Mais une fois que nous avons une méthode pour mesurer une masse, nous pouvons utiliser ces masses pour étalonner d'autres systèmes de mesure: balances, capteurs, transducteurs, etc. même si ces systèmes ne sont pas linéaires. C'est la méthode qui a été employée dans la réalité: à partir du kilogramme étalon on a fabriqué des étalons secondaires, tertiaires, etc. jusqu'au "poids" de la balance des épiciers ou des étalons utilisés par les contrôleurs qui viennent vérifier que les balances n'ont pas été trafiquées.

À partir de ces étalons on peut mesurer des constantes physiques fondamentales, comme la constante de gravitation universelle, ce qui permet de déduire la masse de la terre. Et, en mesurant les orbites planétaires, les masses des planètes et celle du soleil.

Dans le public on fait souvent la confusion entre le poids et la masse et on utilise souvent le terme "poids" à la place de "masse". Le poids est la force avec laquelle la terre attire un objet. En tant que force il ne se mesure pas en kilogrammes mais en **Newtons** (voir plus loin). La force avec laquelle la terre attire un objet dépend de la latitude et de la distance au centre de la terre. Il dépend de la latitude parce que l'accélération centripète (voir le chapitre 2) vient en déduction de la force d'attraction de la terre, et cette accélération centripète dépend de la distance à l'axe de rotation de la terre: elle est plus grande à l'équateur et nulle aux pôles. La conséquence est qu'un objet est plus lourd aux pôles qu'à l'équateur. La force d'attraction de la terre est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de la terre. Donc un objet est plus léger en haut d'une montagne qu'au niveau de la mer.

Par contre la masse d'un objet est une propriété intrinsèque à l'objet et elle ne change pas, ni avec la position sur la terre, ni s'il se trouve dans l'espace ou sur la lune.

Quand on dit que quelqu'un "pèse 70 kilos" il faut comprendre qu'il pèse le même poids qu'une masse de 70 kilogrammes c'est-à-dire 686,49 Newtons.

([3]) À l'origine on avait conçu le kilogramme pour qu'il soit égal à la masse de $10^{-3}m^3$ d'eau à 4 degrés centigrades. Un litre d'eau à $4°C$ a une masse d'un kilogramme (pas exactement, dû aux erreurs de fabrication de l'étalon dans les années 1880).

3.2 Force.

Pour mesurer une force, on prend le même ressort que précédemment et on mesure l'allongement ℓ_2 produit par la force sur le ressort. La force sera:

$$F = \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot 9{,}80665 \textbf{ Newton}$$

La force se mesure en $Newtons$. Les dimensions du $Newton$ sont:

$$\textbf{1 Newton} = \frac{kilogramme \cdot mètre}{seconde^2}$$

Comme pour la définition de la mesure de la masse, cette façon de définir la mesure de la force est plus théorique que pratique. Néanmoins, elle sert à étalonner des ressorts, capteurs, transducteurs, etc.

Comme nous venons de mesurer le poids (la force avec laquelle la terre attire la masse) d'une masse d'un kilogramme, on constate que le poids d'un kilogramme est 9,80665$Newtons$. C'est-à-dire, pour soulever une masse d'un kilogramme, il faut exercer une force de 9,80665$Newtons$ ([4]).

À la différence de la masse, qui est une grandeur scalaire, la force est une grandeur vectorielle. C'est-à-dire pour décrire une force il ne suffit pas de donner sa valeur mais il faut aussi donner sa direction. On peut définir précisément une direction dans l'espace en donnant deux chiffres (par exemple azimut et ascension droite en astronomie ou les deux cosinus directeurs en géométrie, etc.) plus l'intensité de la force: "3 Newtons dirigés vers le nord-est avec 45° d'élévation". Au lieu de cela on préfère, généralement, donner les composantes du vecteur force dans un des systèmes de coordonnées usuels. Nous nous limiterons au système de coordonnées orthogonales et donnerons les composantes du vecteur sous la forme:

$$\vec{F} = (F_x,\ F_y,\ F_z)$$

Comme les forces sont des vecteurs, elles s'additionnent vectoriellement. Ceci est une des rares situations où le grand public "sent" une addition vectorielle intuitivement: quand on pousse un objet vers l'avant et en plus un peu vers la gauche le résultat est le même que celui de le pousser avec une force dirigée vers l'avant et un peu à gauche. Le grand public sent aussi que l'addition des forces est maximale quand toutes les forces sont dirigées dans la même direction (même les politiques sont d'accord).

Pour additionner deux forces on peut additionner les vecteurs en copiant l'un d'eux avec son origine sur l'extrémité de l'autre. Le choix de celui que l'on recopie est indifférent. Il faut bien remarquer que le dessin sert seulement de basse au calcul analytique. Il ne s'agit pas d'obtenir le résultat en mesurant, avec un mètre, la longueur de la flèche sur le papier.

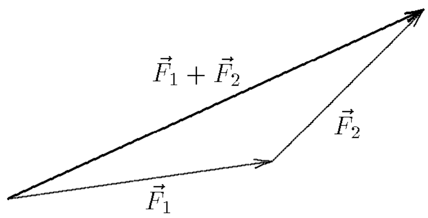


Figure 3.1 Addition géométrique des forces.

On peut aussi additionner des forces en additionnant séparément les composantes des forces suivant les trois coordonnées:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x},\ F_{1y} + F_{2y},\ F_{1z} + F_{2z})$$

Ce résultat est généralisable pour n forces:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix},\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy},\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \right)$$

([4]) Dans la vie de tous les jours on emploie le terme kilo pour parler des forces. En fait, il s'agit d'une unité bâtarde: le kilogramme-force (kgf). Un kilogramme-force est la force nécessaire pour soulever une masse d'un kilogramme. Donc, un kilo-force est égal à 9,807 Newtons. Dans certaines occasions plus techniques on utilise l'unité "decanewton" qui équivaut à 10 Newtons, c'est-à-dire à environ 1 kilo-force. L'abréviation de decanewton est daN.

3.3 Lois du mouvement de Newton.

3.3.1 Première Loi du mouvement.

Nous l'avions déjà mentionnée au début du chapitre:

"Tout corps persiste dans son état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'il ne soit forcé de changer par des forces agissant sur lui."

C'est, comme nous l'avions dit, une autre façon d'énoncer le principe d'inertie de Galilée. Dans la vie de tous les jours, il est pratiquement impossible d'éviter que des forces agissent sur un objet. Comme de toutes façons on ne peut éviter l'attraction de la terre, on peut diminuer au maximum les forces horizontales en diminuant les frottements d'un corps sur son support horizontal (il faut que le support soit horizontal pour éliminer le poids de l'objet). La meilleure façon d'éliminer les frottements est que l'objet soit soutenu par un système de coussins d'air. Avec un tel système les seules forces restantes sont dues à la viscosité de l'air. Observer l'exactitude de la première loi de Newton est difficile dans la vie de tous les jours, mais nous sommes tous convaincus qu'une voiture ou une bicyclette ne s'arrêtent pas rapidement à moins que l'on freine ou que l'on trouve un platane. La première loi avait une utilité à une époque où les gens étaient convaincus que pour maintenir une charrette en mouvement il fallait la tirer en permanence. Actuellement elle fait un peu double usage avec la deuxième loi dont elle constitue un cas particulier.

3.3.2 Deuxième Loi du mouvement.

L'accélération produite par une ou plusieurs forces sur un objet est proportionnelle à la magnitude de la résultante de ces forces et inversement proportionnelle à la masse de l'objet.

On voit que la première loi est un cas particulier de la deuxième quand la somme des forces agissant sur le corps est égale à zéro. Comme corollaire on peut dire que pour qu'un objet soit à l'arrêt ou en mouvement uniforme rectiligne (à vitesse constante) il faut que la somme des forces agissant sur lui soit nulle.

L'expression mathématique de la deuxième loi est:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

qui se lit: "force égale à masse par accélération", étant entendu que, aussi bien la force que l'accélération, sont des vecteurs et que la force est la résultante de toutes les forces qui agissent sur l'objet.

On peut utiliser cette formule en calculant chacune des trois composantes séparément: on calcule l'accélération suivant x avec la composante F_x de la force et on répète l'opération avec les autres deux composantes. Si le problème le permet on peut changer de système de coordonnées pour un autre dans lequel la force et l'accélération n'aient qu'une ou deux composantes non nulles. Finalement on peut calculer l'accélération produite par chacune des forces séparément et additionner tous les vecteurs accélération ainsi obtenus.

3.3.3 Troisième Loi du mouvement, ou Loi d'action et réaction.

Pour chaque action (force) il y a toujours une réaction égale et de signe opposé. Les actions mutuelles entre deux objets sont égales et de sens opposés.

Il est très important de noter que les deux forces de la paire action-réaction agissent sur des corps différents. Quand vous appuyez votre doigt sur la table (action) la table appuie sur votre doigt (réaction) La force que la table exerce sur votre doigt est exactement la même, mais de sens opposé, que celle que vous exercez sur la table. Ceci est vrai pour la table qui est immobile, mais l'est aussi pour un corps accéléré. La force que le cordage d'une raquette de tennis fait sur la balle est exactement la même et de signe opposé que celle que fait la balle sur le cordage de la raquette.

La loi s'applique aussi à des corps qui agissent "à distance", c'est-à-dire pour des forces de nature électrique, magnétique ou gravitationnelle. La force qu'un aimant exerce sur un autre ou sur un morceau de fer est la même et de signe opposé que la réaction que l'autre aimant ou morceau de fer exerce sur le premier. Même chose pour la force que la terre exerce sur la lune et réciproquement, ou pour celles entre le soleil et la terre.

3.3.4 Quelques exemples.

Exemple 3.1 Objet en chute libre.

On laisse tomber un objet de masse m. Avant de le lâcher, la force d'attraction de la terre, c'est-à-dire, le poids de l'objet était compensé par la force qui le maintenait. Maintenant qu'aucune force ne le tient, la seule force qui agit sur l'objet est $F = mg$, où $g = 9{,}807$. Cette force est dirigée vers le centre de la terre (verticale vers le bas). L'accélération de l'objet sera:

$$\frac{F}{m} = \frac{mg}{m} = g$$

L'objet sera donc accéléré vers le bas de $9{,}807\, m/s^2$.

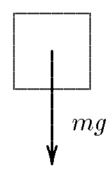


Figure 3.2 La seule force qui agit sur un corps en chute libre est son propre poids mg. De ce fait il subit une accélération g dirigée vers le bas.

Exemple 3.2 Objet accroché au plafond.

Le poids de l'objet mg attire l'objet vers le bas. La corde qui l'accroche au plafond exerce une force F_{co} vers le haut sur l'objet. Comme l'objet est immobile, son accélération est zéro et la somme des forces qui agissent sur lui doit être égale à zéro. En conséquence $F_{co} = mg$. Mais comme la corde exerce une force F_{co} sur l'objet, celui-ci exerce une force égale mais de signe opposé $F_{oc} = F_{co}$. Comme la corde est aussi immobile, la force que l'objet exerce sur la corde doit être compensée par une force égale mais de signe opposé (vers le haut) exercée par le plafond sur l'autre extrémité de la corde F_{pc}. La force de réaction de la corde F_{cp} est égale et de sens contraire à F_{pc}. Toutes les forces ont la même valeur (mais pas le même sens):

$$mg = F_{oc} = F_{co} = F_{cp} = F_{pc}$$

De proche en proche, le poids de l'objet est transmis au plafond.

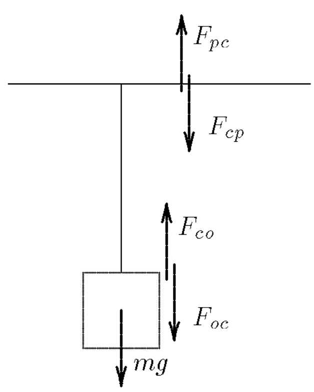


Figure 3.3 Le poids de l'objet est compensé par la force exercée sur lui par la corde. La réaction à cette force est transmise au plafond.

Exemple 3.3 Deux objets accélérés.

Imaginons deux objets de masses m_1 et m_2 reliés par une corde. Avec une corde attachée à l'objet 2 on impose une accélération a à l'ensemble. Provisoirement on néglige la masse des cordes. Les deux objets glissent sans frottement sur le support.

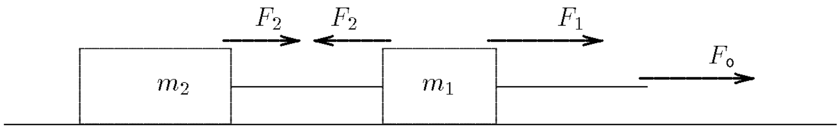


Figure 3.4 Pour donner à l'ensemble une accélération a la force F_o doit être égale aux sommes des forces pour accélérer chacun des objets à la même accélération.

Comme on admet que la masse de la corde est nulle, la force F_o sur la corde est compensée par une force similaire et de signe opposé au niveau de l'objet 1. La réaction à cette force, F_1 agit sur l'objet. La valeur de cette réaction est exactement égale à F_o. Cette force agit vers la droite. L'arrière de l'objet 1 tire sur la corde avec une force F_2. La réaction à cette force agit sur l'objet 1 vers la gauche. Par les mêmes arguments que pour l'objet 1, la force F_2 est transmise à l'objet 2.

Rien d'autre n'est attaché à l'objet 2. La seule force qu'il subit est F_2. Comme on veut que l'accélération soit égale à a,

$$F_2 = m_2 a$$

La résultante des forces qui agit sur l'objet 1 est $F_1 - F_2$ (vers la droite). Comme l'accélération doit être aussi a:

$$F_1 - F_2 = m_1 a$$

d'où on déduit:

$$F_1 = F_2 + m_1 a = m_2 a + m_1 a = (m_1 + m_2)a$$

Maintenant examinons la situation si la masse des cordes n'est pas négligeable devant la masse des objets. Dans ce cas nous nous trouvons avec une chaîne de quatre objets (corde1, objet1, corde2, objet2) et le raisonnement est le même que pour deux objets. Nous pouvons commencer par le dernier: pour l'accélérer il faut lui appliquer une force:

$$F_2 = m_2 a$$

Cette force sera appliquée par l'objet "corde2" lequel subira la réaction (une force F_2 vers la gauche). Pour pouvoir accélérer l'objet "corde2" de masse m_{c2} il faut que la force résultante soit égale à $m_{c2}a$. Mais la force résultante est égale à la force appliquée sur la corde par l'objet 1 F_{o1c2} (vers la droite) moins la force appliquée sur la corde par l'objet 2:

$$F_{o1c2} - m_2 a = m_{c2} a$$

d'où on déduit:

$$F_{o1c2} = m_2 a + m_{c2} a = (m_2 + m_{c2})a$$

Si l'on continue le raisonnement jusqu'à la force F_o on trouvera (faites-le):

$$F_o = (m_1 + m_{c1} + m_2 + m_{c2})a$$

Exemple 3.4 Plan incliné sans friction.

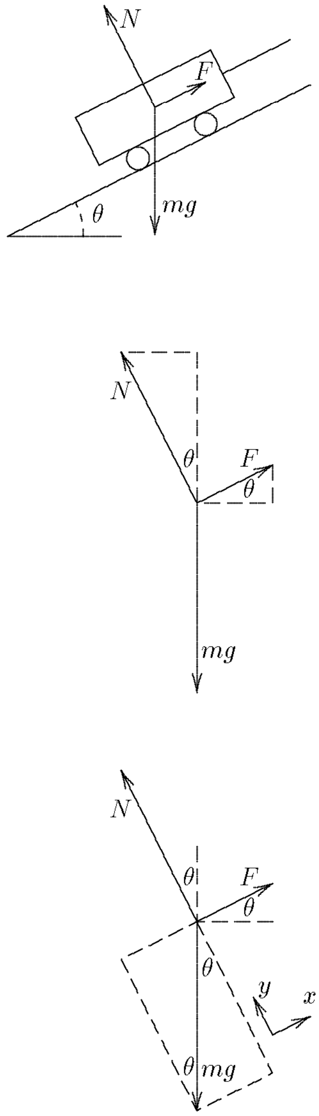


Figure 3.5 Objet tenu immobile sur un plan incliné sans friction. On peut calculer F et N en projetant dans un repère horizontal-vertical comme dessiné au milieu. Mais le calcul est immédiat si l'on choisit un repère parallèle-perpendiculaire au plan incliné, comme le dessin d'en bas.

Soit un plan incliné d'un angle θ sur lequel roule sans friction un objet de masse m. L'objet est attaché par une ficelle parallèle au plan. Nous allons calculer la force exercée par la ficelle et la force exercée par le plan incliné sur l'objet.

Examinons les forces qui agissent sur l'objet. La première est le poids mg de l'objet. Elle est verticale et dirigée vers le bas. La seconde est la force F exercée par la ficelle. Elle est inconnue mais sa direction est parallèle au plan et donc inclinée de θ; sa direction est à droite et vers le haut. La dernière force est celle exercée par le plan incliné sur l'objet. Comme l'objet glisse (grâce aux roulettes) sans friction sur le plan, celui-ci ne peut pas exercer de forces parallèles au plan (cela ne ferait que faire tourner, sans résistance, les roulettes). La force N exercée par le plan ne peut être que perpendiculaire à celui-ci.

Comme l'objet est en équilibre, la somme des forces appliquées sur celui-ci doit être égale à zéro. Examinons la résultante des forces dans le sens horizontal. La composante de F dans le sens horizontal est $F\cos\theta$ (vers la droite). Celle de N est $N\sin\theta$ (vers la gauche) Comme le poids n'a pas de composante horizontale:

$$F\cos\theta = N\sin\theta$$

Dans le sens vertical nous avons mg vers le bas et la composante verticale de N: $N\sin\theta$ (vers le haut), plus la composante verticale de F: $F\cos\theta$

$$mg = N\cos\theta + F\sin\theta$$

Nous avons un système de deux équations et deux inconnues (F et N). En éliminant N nous obtenons:

$$mg = F\sin\theta + F\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta$$

$$mg\sin\theta = F\sin^2\theta + F\cos^2\theta = F$$

et

$$N = F\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = mg\cos\theta$$

Le calcul est encore plus simple si, au lieu de calculer les composantes des forces sur un repère $x - y$ horizontal-vertical, on choisit un repère dans lequel x est parallèle au plan incliné et y perpendiculaire. Pour les composantes en x on obtient directement:

$$F = mg\sin\theta$$

et pour les composantes en y on obtient directement:

$$N = mg\cos\theta$$

On peut encore se demander ce que "voit" le plan incliné. La seule force venant de l'objet est la réaction à la force N. On peut décomposer cette réaction en une composante verticale $F_v = N\cos\theta$ et une horizontale $F_h = N\sin\theta$. En remplaçant par la valeur calculée de N:

$$F_v = mg\cos^2\theta \qquad \text{et} \qquad F_h = mg\cos\theta\sin\theta$$

Exemple 3.5 Objet accroché à deux ficelles.

Soit un objet de masse $m = 5\,kg$ accroché par une ficelle à deux autres ficelles de la façon indiquée dans la figure. Calculer les tensions sur les trois brins partant du nœud commun.

Comme le nœud commun ne bouge pas, la somme des forces agissant sur lui doit être zéro. Dans le sens horizontal nous avons:

$$F_1 \cos 45 - F_2 \cos 30 = 0$$

dans le sens vertical nous avons:

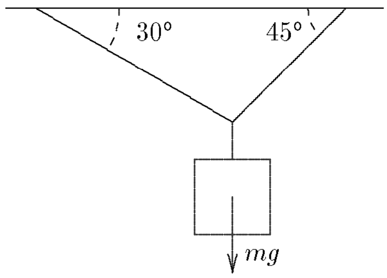
$$F_1 \sin 45 + F_2 \sin 30 = mg = 5 \cdot 9{,}807 = 49{,}03\,Newtons$$

ce qui nous donne le système:

$$\begin{array}{rcrcr} 0{,}707F_1 & + & 0{,}5F_2 & = & 49{,}03 \\ 0{,}707F_1 & - & 0{,}866F_2 & = & 0 \end{array}$$

d'où on tire:

$$F_2 = \frac{49{,}03}{0{,}5 + 0{,}866} = 35{,}89\,N$$
$$F_1 = \frac{0{,}866F_2}{0{,}707} = 43{,}965\,N$$



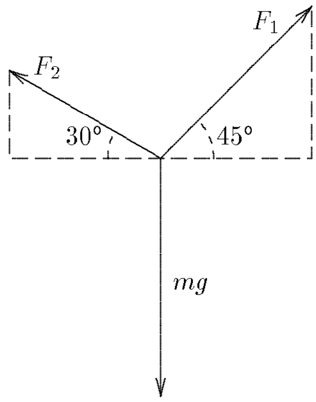


Figure 3.6 Objet accroché à deux ficelles. On connaît l'angle formé par les ficelles. La somme des forces dans toutes les directions doit s'annuler.

Exemple 3.6 Objets accrochés à une poulie.

Deux objets de masses m_1 et m_2 sont accrochés à une poulie avec une corde de masse négligeable. De même, la poulie tenue au plafond est aussi sans friction et de masse négligeable. Son rôle se limite à changer la direction de la ficelle.

Les deux objets ont des masses différentes. Admettons que $m_2 > m_1$. L'ensemble n'est pas en équilibre et l'objet 2, plus lourd, va chuter tout en remontant l'objet 1. Pour remonter l'objet de gauche il faut que la force F_c exercée par la corde sur l'objet soit plus grande que son poids. Si l'accélération (vers le haut) de l'objet de gauche est a nous aurons:

$$F_c - m_1 g = m_1 a$$

Cette force F_c est aussi exercée (vers le haut) par la corde sur l'objet de droite ce qui ralentit sa chute. Si l'objet de gauche monte avec une accélération a vers le haut, celui de droite descendra avec la même accélération:

$$m_2 g - F_c = m_2 a$$

en additionnant ces deux équations on élimine F_c:

$$(m_2 - m_1)g = (m_2 + m_1)a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

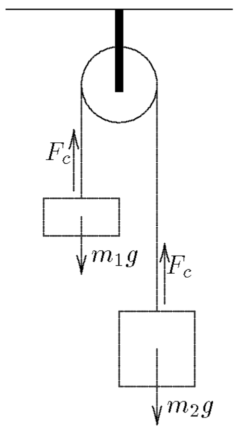


Figure 3.7 Objets accrochés à une poulie. L'objet 2 est plus lourd que l'objet 1 mais sa chute est ralentie par l'objet 1.

Remarquez que si l'hypothèse faite au début que $m_2 > m_1$ avait été fausse, le calcul que nous venons de faire resterait toujours correct: nous aurions trouvé que l'accélération a était négative. Comme nous avions calculé avec a positive vers le bas, le résultat indiquerait, correctement, que l'objet 2 "tombe vers le haut", entraîné par l'objet 1 qui, lui, tombe.

3.4 Référentiel inertiel ou newtonien.

Dans les lois du mouvements de Newton on fait référence à l'immobilité, à des vitesses et à des accélérations. Mais l'immobilité, la vitesse ou l'accélération dépendent du système de coordonnées (référentiel) utilisé pour faire la mesure (rappelez-vous la vitesse de la mouche et celle du car). Eh bien, les lois de Newton ne sont utilisables que si les vitesses et les accélérations sont mesurées à partir d'un **système inertiel**. Un système inertiel est un système qui n'est pas soumis à des accélérations ni à des rotations. Si nous travaillons dans un système non-inertiel, des "pseudo-forces" apparaissent. Ces pseudo-forces n'ont pas toujours de force de réaction évidente. On peut travailler à partir des systèmes de référence non inertiels, et certains problèmes sont plus faciles à résoudre à partir de ces systèmes. Il faut néanmoins faire attention.

Mais comment savoir si le référentiel à partir duquel nous faisons nos mesures est un système inertiel? Voilà une question bien embarrassante. On peut répondre qu'un système inertiel est un système dans lequel les lois du mouvement de Newton sont applicables (pour cette raison on appelle un tel système un **référentiel newtonien**). Cette réponse ne semble pas très sérieuse, mais c'est pourtant la seule que nous pouvons donner. On peut choisir un système de référence fixe par rapport au centre de masses de l'univers. Comme nous verrons plus loin, si les lois de Newton sont valables, le centre de masses de l'univers ne peut pas être accéléré. Le centre de masses peut être - au mieux - en mouvement uniforme non accéléré. Mais...en mouvement par rapport à quoi?. Le système ne doit par tourner. Est-ce que l'univers tourne? Mais s'il tourne...il tourne par rapport à quoi?

Pour aggraver les choses, nous ne savons pas où se trouve le centre de l'univers ni quel est le mouvement de la terre par rapport à cet hypothétique centre.

Les anciens croyaient que la terre était le centre de l'univers et qu'elle était immobile. Voilà qui aurait fait un bon référentiel inertiel! Quand on s'est aperçu que c'était une hypothèse insoutenable (malgré le soutient de la bible et de l'église) on inventa l'**éther**: un fluide subtil et immatériel (immobile, etc) qui occupait tout l'univers. En gros, l'éther était solidaire avec les étoiles, et la terre et le système solaire se déplaçaient dans l'éther.

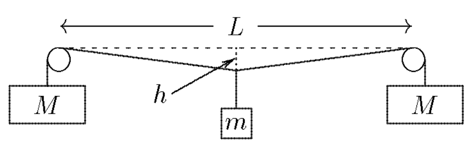
Manque de chance, à la fin du $19^{ème}$ siècle, on s'aperçut que la théorie de l'éther ne tenait pas debout et il fallut attendre Einstein et la Théorie de la Relativité pour que (presque) tout rentre dans l'ordre. Désormais les lois de Newton devraient se limiter à des vitesses petites devant celle de la lumière.

Le résultat final est que *"un système de référence inertiel est un système dans lequel les lois de Newton sont valables"*. Ce n'est pas très satisfaisant, mais c'est tout ce que nous avons.

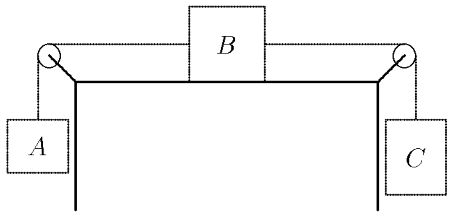
Est-ce que la surface de la terre est un système inertiel? Dans une grande mesure: oui! Certes la terre subit un bon nombre de forces non négligeables (attraction du soleil et de la lune): elle est donc accélérée. De plus elle tourne, donc nous trouvons des forces centripètes. Mais ces effets sont, le plus souvent, négligeables et nous pouvons les ignorer. Par contre si nous voulons calculer la trajectoire des satellites ou des sondes spatiales nous devrons prendre un système de référence fixe par rapport au soleil et qui ne tourne pas par rapport aux étoiles. Ce référentiel n'est probablement pas parfaitement inertiel, mais nous sommes, actuellement, incapables de mesurer les minuscules différences nécessaires pour le démontrer.

3.5 Exercices.

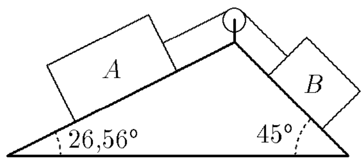
1 - Deux voitures de masses $M = 1000\,kg$ sont accrochées à un câble qui passe par deux poulies séparées de $L = 20\,m$. Un enfant de masse $m = 20\,kg$ s'accroche au câble au milieu entre les deux poulies. Calculez la distance h de laquelle descend le milieu du câble.
R.N.: $10\,cm$.



2 - La masse de l'objet A est $3\,kg$, celle de B est de $10\,kg$ et celle de C est de $6\,kg$. L'objet B glisse sans friction sur la surface du support. Les poulies sont de masse et friction négligeables. Les masses des cordes sont aussi négligeables. Calculez l'accélération des objets et la tension des deux cordes.
R.N.: $a = 1{,}55\,m/s^2$, $T_g = 34{,}077\,N$, $T_d = 49{,}57\,N$.



3 - La masse de l'objet A est $3\,kg$. Calculez quelle doit être la masse de l'objet B pour que les deux objets soient en équilibre. Calculez la tension de la corde. Si la masse de l'objet B passe à $6\,kg$, calculez l'accélération des objets et la tension de la corde.
Comme d'habitude, les objets glissent sans friction, et la corde et la poulie sont idéales.
R.N.: $1{,}9\,kg$, $T = 13{,}16\,N$, $a = 3{,}16\,m/s^2$, $T = 22{,}65\,N$.



4 - Tantalopithèque. Une corde de masse négligeable passe par une poulie idéale (sans masse ni friction) fixée au plafond. D'un côté on a accroché un régime de bananes de masse m. Un singe de même masse m se tient accroché de l'autre côté de la corde un peu plus bas. Tout ça est au repos. Au bout d'un moment le singe a faim et décide d'attraper une banane. Il tire sur son morceau de corde avec une force F supérieure à son poids. Calculer le mouvement (accélération, vitesse et position) du singe et du régime de bananes en fonction du temps. Si, au départ, le singe se trouvait à une distance d_o au dessous du régime de bananes, comment varie cette distance avec le temps?
R.N.: $d = d_o$.

5 - Votre chariot de supermarché (bien rempli) a une masse totale de $40\,kg$. Vous le poussez à $3\,km/h$. Tout d'un coup, pour éviter l'accident, vous êtes obligé de l'arrêter en $30\,cm$. Quelle force vous a-t-il fallu lui appliquer pour l'arrêter? Calculez l'équivalent en unités pratiques (kilos grand-mère).
R.N.: $46{,}3\,N$.

6 - Au lancer du poids on peut estimer la distance pendant laquelle l'athlète accélère le poids à environ $1{,}5\,m$. Si le poids a une masse de $7\,kg$ et s'il réussit à l'envoyer à $20\,m$ calculez la force moyenne exercée sur le poids.
R.N.: $\simeq 458\,N$.

4. FRICTION. FORCES CENTRIPÈTES et CENTRIFUGES .

4.1 Friction.

La physique se rapporte au monde dans lequel nous vivons et non à un univers idéal. L'expérience de tous les jours nous montre que pour faire glisser un objet sur un autre, il faut vaincre les forces de friction et que ces forces de friction dépendent des matériaux dans lesquels sont faits les objets. La friction dépend aussi de l'état de surface: les objets lisses ou polis présentent une friction plus faible. On constate aussi qu'il faut une force plus grande pour "arracher" l'objet à la friction que pour le maintenir en mouvement. Nous savons aussi qu'en lubrifiant on diminue la friction mais que l'on ne l'annule pas.

La friction qu'il faut vaincre pour "arracher l'objet" et le mettre en mouvement s'appelle **friction statique**. La friction qu'il faut vaincre pour maintenir un objet en mouvement s'appelle **friction dynamique**. Les deux frictions, statique et dynamique, s'appellent **friction sèche** par opposition à la friction due aux liquides ou à des objets lubrifiés qui s'appelle **friction visqueuse**. La friction dynamique dépend un peu de la vitesse entre les deux corps. La friction visqueuse dépend énormément de la vitesse et cette dépendance n'est pas, en général, linéaire. C'est-à-dire, la force pour la vaincre n'est pas, en général, proportionnelle à la vitesse.

4.1.1 Friction statique.

Prenons un objet posé sur une surface. Choisissons une surface horizontale pour nous affranchir de la composante parallèle à la surface du poids de l'objet. Si nous exerçons une force F parallèle à la surface et que nous augmentons progressivement cette force, nous observons que l'objet reste immobile jusqu'à ce que, brusquement, l'objet "s'arrache" et commence à bouger. Le corps exerce une force P égale à son poids sur la surface. La réaction N à cette force est de même valeur, perpendiculaire à la surface et dirigée vers le haut. Quand nous appliquons une force F, la friction crée une force f_s de même valeur et de signe opposé appliquée à l'objet. Les forces parallèles à la surface F et f_s se compensent et l'objet reste immobile. Il est évident que la réaction à la force de friction f_s est appliquée par l'objet sur la surface et que cette réaction a la même valeur et la même direction que F. Si nous augmentons progressivement la force F, la force de friction f_s augmentera de la même façon, mais pas indéfiniment. Quand F atteint une certaine valeur, la force de friction f_s n'augmente plus. Les forces horizontales ne s'annulent plus et l'objet subit une accélération vers la droite. La valeur de cette accélération est donnée par la Loi de Newton: $a = (F - fs)/m$.

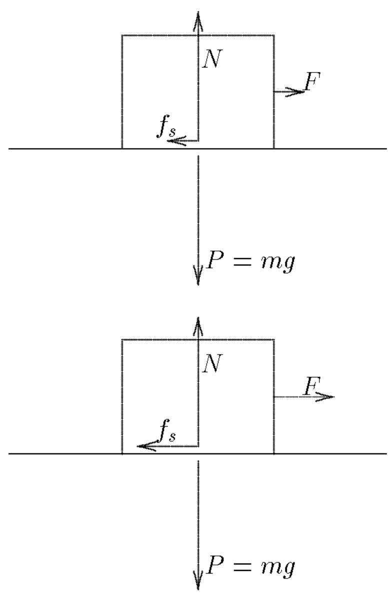


Figure 4.1 La force de friction f_s compense exactement la force appliquée F si $f_s \leq \mu_s N$.

On observe que la force f_s maximale (avant que l'objet se "décolle") est proportionnelle à la force N. Ce coefficient de proportionnalité s'appelle **coefficient de friction statique** μ_s

$$f_s \leq \mu_s N$$

Une fois que l'objet se met en mouvement, la friction n'est plus statique mais dynamique. Comme nous le verrons plus loin, les forces de friction dynamique sont plus faibles que les forces statiques. Donc, une fois l'objet "décollé", si la force appliquée reste la même, l'objet reste en mouvement.

4.1.2 Friction dynamique.

Quand l'objet est en mouvement, la force de friction f_d est égale à:

$$f_d = \mu_d N$$

Le coefficient μ_d est le **coefficient de friction dynamique**. Presque toujours il est plus faible que le coefficient de friction statique. Il dépend un peu de la vitesse mais, pour la plupart des cas, on peut le considérer indépendant de la vitesse.

Si l'on applique une force constante à un corps à l'arrêt, dès que la force appliquée dépasse la force $f_s N$, l'objet se décolle. La force de friction statique est remplacée par la force de friction dynamique. Cette force est plus faible que la force nécessaire pour décoller l'objet. L'objet est donc accéléré.

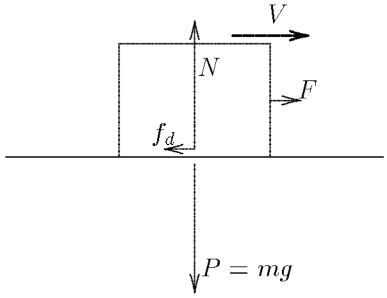


Figure 4.2 La force de friction dynamique f_d ne dépend pas de la vitesse. Si la force appliquée F est plus grande que f_d l'objet est accéléré. Si $F < f_d$ l'objet est ralenti.

Coefficients de friction		
	Statique μ_s	Dynamique μ_d
Acier sur acier	0,74	0,57
Aluminium sur acier	0,61	0,47
Bois ciré sur neige mouillée	0,14	0,1
Bois ciré sur neige sèche	-	0,04
Bois sur bois	0,25 – 0,5	0,2
Caoutchouc sur béton	1,0	0,8
Cuivre sur acier	0,53	0,36
Cuivre sur verre	0,94	0,4
Glace sur glace	0,1	0,03
Joins synoviales chez l'homme	0,01	0,003
Laiton sur acier	0,51	0,44
Métal sur métal (lubrifiés)	0,15	0,06
Téflon sur acier	0,04	0,04
Téflon sur Téflon	0,04	0,04
Verre sur verre	0,94	0,4

Figure 4.3 Voici une table avec quelques coefficients de friction. Ces valeurs ne sont qu'approximatives. Je n'ai pas trouvé les coefficients pour le Graflon (de la famille du Téflon) qui a la propriété remarquable d'avoir un coefficient de friction statique inférieur au coefficient dynamique.

Il peut paraître surprenant que les forces de friction, statiques ou dynamiques, ne dépendent que de la normale et pas du tout de l'étendue de la surface de contact. La raison est que la force de friction par unité de surface est proportionnelle à la pression:

$$\frac{f_s}{S} = Cte \cdot P$$

Mais la pression est égale à la force (le poids de l'objet dans notre cas) divisée par la surface d'appui:

$$\frac{f_s}{S} = Cte \cdot \frac{N}{S}$$

d'où on voit que la surface intervient dans deux sens qui se compensent: si la surface est petite, la pression est plus grande, donc la force de friction par unité de surface est plus grande ce qui compense la diminution de la surface.

Parmi des conséquences du fait que le coefficient de friction dynamique est plus faible que le coefficient statique on trouve des phénomènes d'instabilité, de "broutage" ou des bruits comme ceux que produisent les portes qui grincent, les freins qui couinent, les pneus qui crissent ou les violons qui sanglotent([1]). Voici ce qui se produit.

Soit un objet placé sur une surface avec de la friction non négligeable. Imaginez que vous appliquez une force à l'aide d'un ressort (soit en poussant ou en tirant) vous augmentez la force en déformant le ressort. Au moment où l'objet "décroche" la force de friction diminue et la force du ressort accélère l'objet. Le mouvement de l'objet diminue la déformation du ressort ce qui diminue la force. Quand l'objet s'est déplacé suffisamment pour que la force du ressort ne soit plus supérieure à la force de friction dynamique, l'objet décélère. Dans certaines conditions l'objet décélère jusqu'à l'arrêt. Si le mouvement de votre main en tirant ou poussant le ressort était continu, il faudra attendre que le ressort soit à nouveau déformé suffisamment pour que la force soit suffisante pour faire décrocher l'objet à nouveau. La périodicité de cette instabilité peut être très petite et se situer dans la gamme audible. C'est le cas pour les exemples cités plus haut.

Une autre conséquence de la différence des coefficients de friction est qu'il est plus efficace de freiner une voiture sans faire glisser les pneus, mais juste en dessous de la limite de la glisse. Comme réussir à le faire n'est pas donné à tout le monde, on a conçu des dispositifs asservis pour le faire à la place du conducteur (système ABS).

Exemple 4.1 Objet sur un plan incliné.

Soit un objet de masse m sur un plan incliné d'un angle θ ajustable. Le coefficient de friction statique entre l'objet et la surface du plan est $\mu_s = 0{,}74$ et le coefficient dynamique est $\mu_d = 0{,}57$. Calculer l'angle θ pour lequel l'objet "décroche". Calculer l'accélération après le décrochage.

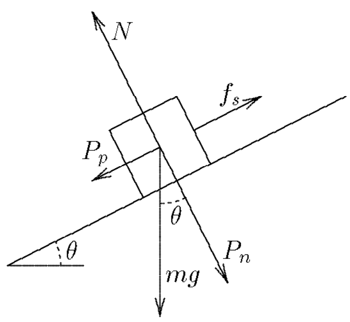


Figure 4.4 L'objet décroche quand la force de friction f_s ne compense plus la composante du poids parallèle à la surface.

Le poids de l'objet mg peut être décomposé en une force $P_n = mg\cos\theta$ normale au plan puis une autre $P_p = mg\sin\theta$ parallèle au plan. La force perpendiculaire est compensée par la réaction N du plan. La force parallèle P_p entraînerait l'objet vers le bas s'il n'y avait pas la force de friction f_s pour la compenser.

L'objet "décrochera" quand la limite des forces de friction sera atteinte, c'est-à-dire pour:

$$f_s = \mu_s N$$

à la limite du décrochement $f_s = P_p = mg\sin\theta_d$ et $N = mg\cos\theta_d$, où θ_d est l'angle cherché.

$$\mu_s N = \mu_s mg\cos\theta_d = mg\sin\theta_d$$

$$\tan\theta_d = \mu_s \quad\Longrightarrow\quad \theta_d = 36{,}5°$$

([1]) Les sanglots longs des violons de l'automne... (Verlaine)

Une fois que l'objet décroche la force de friction devient $f_d = \mu_d N$ et l'accélération devient:

$$a = \frac{mg\sin\theta_d - \mu_d mg\cos\theta_d}{m} = g(\sin\theta_d - \mu_d\cos\theta_d) = 1{,}34\, m/s^2$$

4.2 Force centripète et force centrifuge.

Dans le chapitre 2 nous avons parlé de l'accélération centripète. Il s'agissait de l'accélération que subit un objet dont la vitesse change de direction sans changer de module. Nous avions dit aussi que si la vitesse de l'objet changeait aussi bien de direction que de module on pouvait décomposer l'accélération en une composante parallèle au mouvement et une autre perpendiculaire. C'est cette composante perpendiculaire qui est l'accélération centripète: elle change la direction de la vitesse sans changer son module.

Maintenant nous savons que pour imposer une accélération à un objet il faut lui appliquer une force donnée par la loi de Newton: $F = ma$. Comme l'accélération centripète est $a = V_T^2/r = r\omega^2$, la **force centripète** est:

$$F_c = m\frac{V_T^2}{r} = mr\omega^2$$

où V_T est la vitesse tangentielle, ω est la vitesse angulaire et r le rayon de rotation.

Si vous faites tourner un poids à l'extrémité d'une ficelle, c'est la ficelle qui exerce la force centripète sur le poids (et vous la sentez dans votre main). Si vous lâchez la ficelle la force centripète tombe à zéro et, avec elle, l'accélération centripète. La vitesse du poids ne change plus de direction et l'objet continue tout droit (prend la tangente).

Nous savons que pour toute force il y a une réaction. Pour la force centripète, la force que la ficelle exerce sur le poids, on trouve la **force centrifuge** qui est la réaction à la force centripète. La force centrifuge est la force que le poids exerce sur la ficelle, et celle que, à travers la ficelle, vous sentez dans votre main.

Il faut bien comprendre que ce n'est pas la force centrifuge qui "pousse vers l'extérieur" le poids. Rien ne pousse le poids vers l'extérieur. La force centripète le tire vers l'intérieur et la force centrifuge est la réaction du poids qui préférerait continuer tout droit.

Imaginez que vous êtes assis dans le siège passager d'une voiture, imprudemment sans ceinture, et que le conducteur tourne brusquement à gauche. Pour que la voiture tourne à gauche il lui faut une force centripète qui est appliquée par la chaussée sur les pneus. Mais ce qui nous intéresse c'est votre comportement et ce que vous ressentez pendant le virage. Pour que vous tourniez vers la gauche il faut que la voiture applique sur vous une force centripète vers la gauche. Faute de ceinture, c'est la portière qui va appliquer la force sur votre épaule. S'il n'y avait pas de portière, ni de ceinture et que vous ne vous teniez pas à la voiture, vous continueriez tout droit et verriez (pendant un court instant) la voiture s'éloigner à votre gauche. Refermons la portière. Comme elle vous pousse vers la gauche, vous avez l'impression qu'une force mystérieuse vous pousse vers la droite et vous appelez cette force mystérieuse "force centrifuge". De mon référentiel inertiel je vous dis "Vous avez tort: la force centrifuge est celle que vous appliquez avec votre épaule sur la portière". Mais de votre référentiel accéléré vous pouvez me dire: "La force centrifuge est bien réelle; je peux même la mesurer: elle est égale à celle qu'il faut appliquer pour ramener le poids d'un fil à plomb à la verticale".

Faisons une nouvelle expérience avec la même voiture. Cette fois vous pouvez mettre la ceinture. Tenez avec votre main un fil à plomb: une ficelle avec un poids (plomb) attaché à l'autre extrémité. Quand la voiture roule tout droit à vitesse constante, la seule force qui agit sur le plomb est son propre poids et il pend à la verticale. Maintenant la voiture prend une trajectoire circulaire qui la fait tourner à gauche. Dans cette nouvelle trajectoire, pour que le plomb vous suive, en plus d'une force verticale égale à son propre poids, il faut lui appliquer une force centripète pour qu'il tourne avec vous. Pour ceci il faut que votre main soit à la gauche de la verticale du plomb. Si vous ne voyez que le fil à plomb et que vous n'êtes pas au courant que la voiture tourne, vous déduirez que la voiture s'est inclinée vers la droite ou qu'une nouvelle force est apparue et qui tire le plomb vers la droite. En mesurant la tension sur le fil vous pourrez conclure que ce n'est pas la voiture qui s'est inclinée vers la droite car la tension sur le fil est maintenant plus grande que le poids du plomb. Donc c'est une nouvelle force qui est apparue. C'est cette nouvelle force que l'on appelle aussi **force centrifuge**. Mais en réalité ce n'est pas une vraie force, ce n'est qu'une pseudo-force.

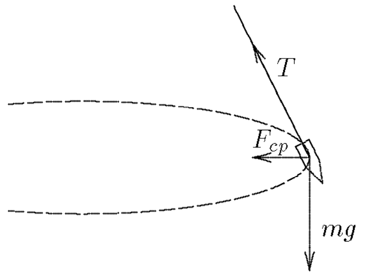


Figure 4.5 Fil à plomb dans une voiture qui suit la trajectoire en pointillés. Forces vues par un observateur au sol. La somme des forces n'est pas zéro et le plomb est accéléré vers l'intérieur de la trajectoire.

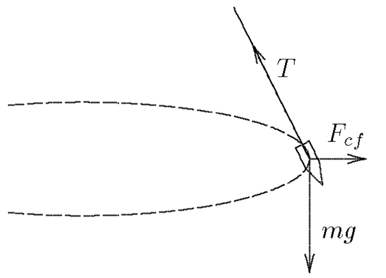


Figure 4.6 Fil à plomb dans une voiture qui suit la trajectoire en pointillés. Forces vues par un observateur dans la voiture. La somme du poids plus la pseudo-force centrifuge s'annulent avec la tension du fil.

Nous avions dit que les lois de Newton ne pouvaient s'appliquer qu'à partir des systèmes de référence inertiels: des systèmes non accélérés. À partir du sol, immobile, je constate qu'une force centripète est appliquée sur le plomb pour le forcer à tourner. À partir de la voiture, accélérée et non inertielle, on voit apparaître des pseudo-forces centrifuges qui "tirent" ou "poussent" les corps vers l'extérieur. La valeur absolue de ces forces centrifuges est la même que celle des forces centripètes calculées à partir du système inertiel. On peut étudier un problème aussi bien à partir du référentiel inertiel qu'à partir du référentiel accéléré. Il faut simplement, dans le référentiel accéléré, ajouter les pseudo-forces à tous les corps. Ces pseudo-forces ont une valeur ma (a étant l'accélération) et sont dirigées en sens contraire à l'accélération vue du système inertiel. Dans le cas de la voiture tournant à gauche, l'accélération centripète est dirigée vers le centre de rotation, et les pseudo-forces dans le sens opposé au centre de rotation.

Dans un référentiel non inertiel, avec les pseudo-forces, la somme des forces qui agissent sur un corps est égale à la masse du corps multipliée par l'accélération mesurée dans le système non inertiel. Les pseudo-forces nous permettent de travailler avec les lois de Newton comme si le référentiel était inertiel.

Le choix du système de référence (inertiel ou pas) est laissé au goût, intuition, intelligence, expérience, clairvoyance ou préférences de la personne qui traite le problème. Il est évident que le résultat ne dépend pas de la méthode d'analyse. Mais la longueur ou la facilité de l'analyse ou du calcul d'un problème dépendent de la méthode choisie. Il y a des problèmes qui sont beaucoup plus simples à traiter par une méthode que par une autre

Exemple 4.2 Pendule conique.

Sous ce nom savant se cache un objet très simple: un poids accroché à une ficelle. Il faut en plus, pour mériter le nom, que le poids décrive une trajectoire circulaire dans un plan horizontal. Dans ce cas la ficelle balaye une surface conique (d'où le nom). Dans cet exemple m sera la masse de l'objet, ℓ la longueur de la ficelle, θ la demi-ouverture du cône, r le rayon de la trajectoire et ω la vitesse angulaire du mouvement.

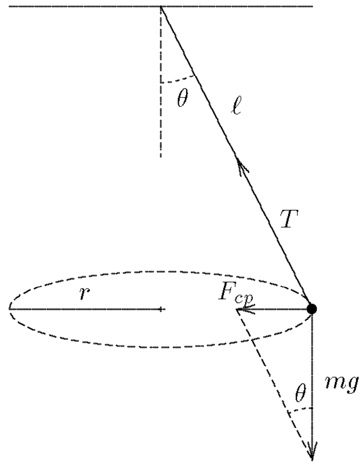


Figure 4.7 Pendule conique. La ficelle décrit un cône et le poids décrit un cercle. La composante horizontale de T est la force centripète. La composante verticale est égale au poids de l'objet.

La résultante des forces appliquées sur l'objet $\overrightarrow{mg} + \overrightarrow{T}$ doit être égale à la force centripète $\overrightarrow{F_{cp}}$:

$$F_{cp} = mg \tan\theta$$

mais nous savons que l'accélération centripète est égale à $r\omega^2$:

$$F_{cp} = ma = mr\omega^2$$

et $r = \ell sin\theta$. Donc,

$$mg \tan\theta = m\ell\omega^2 \sin\theta$$

Comme m n'est pas égale à zéro, on peut diviser par m.
Par contre, même si $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, il faut réfléchir avant de diviser les deux côtés de l'équation par $\sin\theta$. Une équation peut être satisfaite parce que les deux membres sont multipliés par quelque chose qui vaut zéro. Prenons par exemple l'équation $xy = xz$. Si, au lieu de diviser bêtement par x, on passe tous les termes à gauche on obtient:

$$x(y - z) = 0$$

Pour que le produit soit zéro il suffit qu'un des facteurs soit nul. Vous avec donc deux solutions possibles: $x = 0$ et $y = z$. En divisant par x vous auriez raté la première solution.

Si nous faisons la même chose avec l'équation pour le pendule conique nous obtenons:

$$\sin\theta\left(\frac{g}{\cos\theta} - \ell\omega^2\right) = 0$$

ceci nous donne deux solutions:

$$\begin{cases} \sin\theta & = & 0 \\ \cos\theta & = & \frac{g}{\ell\omega^2} \end{cases}$$

La première solution est banale: le pendule conique ne tourne pas; r et θ son nuls.

La seconde semble plus intéressante, mais elle pose un problème: si $\omega^2 < g/\ell$ on se retrouve avec $\cos\theta > 1$ (aïe!). Physiquement cela veut dire que pour des vitesses angulaires grandes ($\omega > \sqrt{g/\ell}$) nous avons deux possibilités: pas de rotation ou $\cos\theta = g/\ell\omega^2$. Pour des vitesses angulaires petites ($\omega < \sqrt{g/\ell}$) la seule solution possible est $\theta = 0$. Autrement dit, le pendule conique ne peut décrire des cônes et cercles qu'au dessus d'une certaine vitesse angulaire.

4.3 Exercices.

1 - Une voiture freine et bloque ses roues. Sa décélération est de $8\,m/s^2$. Calculez le coefficient de friction entre les pneus et la chaussée.
R.N.: $\simeq$ 0,815.

2 - La même voiture de la question précédente (coefficient de friction avec les roues bloquées égal à 0,8) roule à 90 km/h. Calculez sa distance d'arrêt:

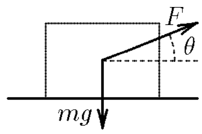
a- sur une route horizontale.

b- sur une route en montée de 10°.

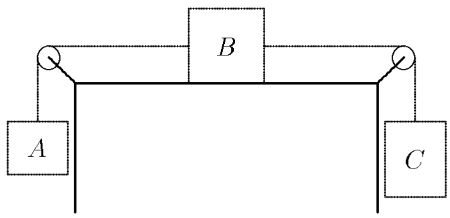
c- sur une route en descente de 10°.

R.N.: a:39,82 m; b:33,13 m; c:51,86 m.

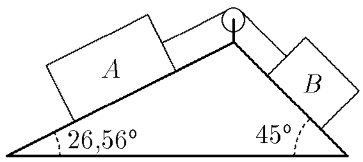
3 - On veut traîner sur le sol un objet de masse m. Si le coefficient de friction entre l'objet et le sol est μ, calculez l'angle θ pour lequel la force F à exercer pour bouger l'objet est la plus faible.



4 - La masse de l'objet A est 3 kg, celle de B est de 5 kg et celle de C est de 6 kg. Le coefficient de friction dynamique entre l'objet B et la surface du support est de μ_d = 0,25. Les poulies sont de masse et friction négligeables. Les masses des cordes sont aussi négligeables. Calculez l'accélération des objets et la tension des deux cordes.
R.N.: a = 1,23 m/s^2; T_g = 33,11 N; T_d = 51,50 N.



5 - Le coefficient de friction statique des objets avec les plans inclinés est μ_s = 0,2. La masse de l'objet A est 3 kg. Calculez qu'elle doit être la masse maximum et minimum de l'objet B pour que les deux objets ne bougent pas. Calculez la tension de la corde. Si la masse de l'objet B passe à 6 kg, et que le coefficient de friction dynamique est μ_d = 0,1, calculez l'accélération des objets et la tension de la corde.
La corde et la poulie sont idéales.
R.N.: $0{,}95 < m_B < 3{,}32$; $a = 1{,}65$; $T = 23{,}38\,N$



6 - Le coefficient de friction statique des pneus d'une voiture est de 0,9. Calculez le rayon de courbure minimum que la voiture peut suivre à 90 km/h sans déraper.
R.N.: 70,8 m.

7 - La voiture de la question précédente roule juste en dessous de la vitesse maximum (avant dérapage). Pendant son virage un danger surgit et le conducteur freine. Décrivez la suite des événements si:

a.- Le conducteur bloque les roues.

b.- Le conducteur freine à mort mais sans bloquer les roues (avec l'ABS, par exemple).
R.: a: continue tout droit. b: se met à déraper .

8 - Un avion de chasse vole à 1500 km/h. Le pilote se souvient qu'il a laissé une casserole sur le feu. Calculez le temps minimum qu'il met à faire demi-tour sans dépasser les 8 **g** d'accélération que sa combinaison anti-**g** lui permet d'encaisser sans perdre connaissance. Calculez le rayon du demi-cercle. N'oubliez pas que, dans les "8 **g**", il faut compter aussi l'accélération de gravité.
R.N.: t = 16,8 s; $r \simeq 2{,}23\,km$.

5. TRAVAIL ET ÉNERGIE .

5.1 Travail effectué par une force.

Le travail effectué par une force F sur un objet est égal au produit de la force par le déplacement ℓ du point sur lequel est appliquée la force. Le déplacement qui compte est le déplacement dans le sens de la force.

$$T = F\,\ell$$

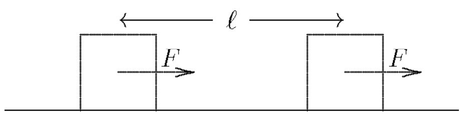


Figure 5.1 Le point d'action de la force s'est déplacé de ℓ vers la droite. Le travail effectué par la force horizontale est $T = F\,\ell$.

Le travail se mesure en **Joules**(1). Un $Joule$ est égal à $1\,Newton \cdot 1\,mètre = 1\,kg\,mètre^2/s^2$.

Si le déplacement s'effectue dans le sens opposé à celui de la force le travail effectué est négatif. Nous verrons plus loin la signification d'un travail négatif.

Si la force n'est pas parallèle au déplacement, le travail effectué est égal au déplacement multiplié par la composante de la force parallèle au déplacement:

$$T = F\,\ell \cos\theta$$

où θ est l'angle que fait la direction de la force avec celle du déplacement.

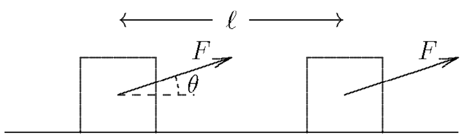


Figure 5.2 Le travail est égal au produit de la composante de la force parallèle au déplacement multipliée par ce dernier. $T = F\,\ell \cos\theta$.

On peut écrire ce même résultat en utilisant la représentation vectorielle de la force et du déplacement:

$$T = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$$

où le point "$\cdot$" indique le **produit scalaire**(2) de deux vecteurs.

---

(1) James Prescott Joule (1818-1889). Physicien anglais né à Salford. Étudia la chaleur dissipée par des conducteurs (effet Joule). Détermina l'équivalent mécanique de la chaleur

(2) Rappel: le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A} = (A_x\,,\,A_y\,,\,A_z)$ et $\vec{B} = (B_x\,,\,B_y\,,\,B_z)$ donne un scalaire dont la valeur peut être calculée soit à partir des composantes:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

soit à partir des longueurs des vecteurs et de l'angle θ entre les deux:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

Quand la force n'est pas constante le long du déplacement, on définit le travail comme la somme des travaux infinitésimaux:

$$T = \int_a^b F \cos\theta d\ell$$

ou, sous forme vectorielle:

$$T = \int_a^b \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Pour calculer ces intégrales il faut pouvoir exprimer toutes les variables en fonction d'une variable commune (pas nécessairement ℓ).

Il faut bien remarquer que le fait d'appliquer une force sur un objet n'implique pas nécessairement d'effectuer un travail. Si le point où la force est appliquée ne bouge pas ou s'il bouge perpendiculairement à la force, il n'y a pas de travail effectué.

Si vous vous accrochez, avec vos mains, à une barre fixe, vous finirez par vous fatiguer, mais vous n'aurez effectué aucun travail sur la barre. Vous auriez pu vous accrocher en utilisant un baudrier, ce qui vous aurait évité la fatigue. Même les humains non-fonctionnaires peuvent se fatiguer sans effectuer de travail (au sens physique, cela s'entend).

De même, quand un objet glisse sans friction sur une surface horizontale, la force de son poids se déplace sur le support mais il n'y a pas de travail effectué car le déplacement du point d'action de la force est perpendiculaire à celle-ci.

Par contre quand on fait glisser un objet sur une surface avec friction, on effectue un travail:

$$T = F_d \ell = \mu_d m g \ell$$

on utilise le coefficient de friction dynamique puisque l'objet glisse. Nous verrons plus tard que ce travail se transforme en chaleur.

Quel travail faut-il effectuer pour "décoller" un objet (à cause de son coefficient de friction statique) et le mettre en mouvement? Si l'objet était parfaitement rigide le travail serait nul: aussi longtemps que l'objet ne bouge pas, la force appliquée ne fait pas de travail. Dès que l'objet bouge, le coefficient qui joue est le coefficient dynamique. Dans la réalité les objets ne sont pas parfaitement rigides et la force appliquée les déforme toujours plus ou moins. Quand on déforme l'objet le travail effectué est égal au produit de la force par la déformation.

Exemple 5.1 Travail pour élever un poids à une hauteur h.

Calculons le travail nécessaire pour faire monter un masse m d'une hauteur h. Comme nous n'avons pas de contrainte de temps, nous pouvons appliquer sur l'objet une force très, très légèrement supérieure au poids mg de l'objet. Le déplacement mettra longtemps, mais nous ne sommes pas pressés. Le travail effectué sera donc:

$$T = F\,\ell = mgh$$

Le travail à fournir est le même si nous montons de h verticalement ou par une autre trajectoire. Dans la figure de droite nous avons dessiné un tout petit bout de trajectoire suffisamment petit pour que ce petit bout puisse être assimilé à une droite. Le travail à fournir pour déplacer l'objet de $d\ell$ est:

$$dT = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = F \cos\theta\, d\ell$$

Remarquez que, comme la distance à parcourir est infiniment petite (un différentiel), le travail aussi doit être infiniment petit dT. Mais $\cos\theta\, d\ell$ n'est autre chose que la distance verticale parcourue par l'objet. La distance horizontale ne joue aucun rôle. Comme le travail total est la somme de tous ces petits travaux dT, seule la distance verticale compte.

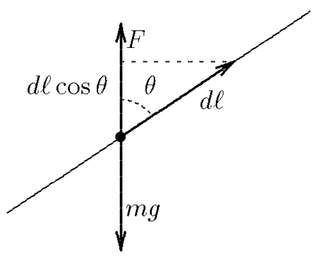


Figure 5.3 Le travail à fournir pour soulever un poids ne dépend que de la distance verticale.

Il est très intéressant de noter que si, au lieu de faire monter l'objet, nous le faisons descendre, le travail effectué sera négatif (car le déplacement se fait en sens inverse de la force). Donc, quand nous faisons monter l'objet de h nous fournissons un travail mgh mais quand nous le faisons redescendre de h nous fournissons un travail négatif égal à $-mgh$. Donc, le travail total pour le monter et redescendre est zéro. Nous reviendrons plus tard sur ces faits.

Exemple 5.2 Travail pour étirer un ressort.

La force nécessaire pour étirer un ressort est proportionnelle à la déformation (différence de longueur par rapport à la longueur non étiré). Ceci est connu comme la "Loi de Hooke"([3]):

$$F = k\,\ell$$

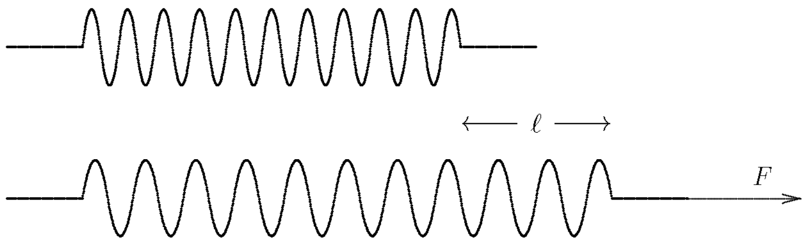


Figure 5.4 La force F nécessaire pour étirer un ressort est proportionnelle à l'élongation ℓ.

Le coefficient k dépend de chaque ressort. Ses unités sont, des $Newtons/mètre = kg/s^2$. Calculons le travail nécessaire pour l'étirer d'une longueur L.

Cette fois la force n'est pas constante puisqu'elle dépend de l'allongement. Pour un allongement ℓ la force sera $k\ell$. À mesure que nous étirons le ressort la force augmente avec l'étirement. Il nous faut faire la somme de tous les petits travaux à fournir pour allonger le ressort de ℓ à $\ell + d\ell$:

$$dT = F d\ell = k\ell d\ell$$

Le travail à fournir pour passer d'un allongement nul à un allongement L sera:

$$T = \int_0^L k\ell d\ell = \tfrac{1}{2} k L^2$$

5.2 Puissance.

La puissance est le rapport entre le travail produit et le temps mis à le produire:

$$P = \frac{T}{t}$$

La puissance se mesure en $Joules/seconde$ = **watts**([4]). Ce **watt** est le même que vous connaissez déjà en électricité: $watt = volt \cdot ampère$.

Exemple 5.3 Puissance d'un grimpeur.

Une idée reçue prétend qu'une personne en bonne forme grimpe d'environ $300\,m$ par heure, et ceci plus ou moins indépendamment de la pente. Calculons la puissance d'une telle personne de $70\,kg$ de masse.

Le travail total est égal au poids mg multiplié par la hauteur ($300\,m$), la puissance sera donc:

$$P = \frac{mgh}{t} = \frac{70 \cdot 9{,}81 \cdot 300}{3600} = 57{,}2\,w$$

Il parait qu'un bon athlète est capable de fournir $500\,w$ pendant longtemps.

([3]) Robert Hooke. (1635-1703) Astronome et mathématicien anglais né à l'île de Wight. Énonça la loi de déformation élastique d'un corps.

([4]) James Watt. (1736-1819) Mécanicien et ingénieur écossais, né à Greenock. C'est l'inventeur de la vraie machine à vapeur (qui n'a rien à voir avec la chose à Papin). Apporta de nombreuses améliorations: condenseur, piston à double action, régulateur à boules, etc. Il mesura et définit le HP (horse power, actuellement 745,7 watts).

5.3 Énergie.

Vous allez être déçus: en physique il n'y a pas de définition d'énergie en elle-même. Il y a plusieurs formes d'énergie: cinétique, potentielle, thermique, chimique, masse, électrique, etc. et on sait calculer chacune d'elles. On sait que l'énergie peut se transformer d'une forme à une autre. On accepte la **loi de conservation de l'énergie** qui dit que, dans un système fermé, c'est-à-dire, un système qui ne peut fournir ni recevoir de l'énergie de l'extérieur, l'énergie se conserve. Cette loi est un des piliers de la physique car on n'a jamais observé de processus où elle ne soit valable. Chaque fois que, dans une nouvelle expérience, on a constaté une différence entre l'énergie mesurée au départ et celle à l'arrivée on a fini par trouver où était passée la partie manquante. Pour cela il a fallu parfois postuler l'existence d'une nouvelle particule élémentaire (le neutrino, que l'on a fini par trouver) ou établir l'équivalence entre masse et énergie ($E = mc^2$, que l'on a prouvée).

Nous savons aussi que quand nous exerçons un travail sur un système nous augmentons l'énergie totale du système d'exactement le travail que nous avons exercé. Et réciproquement, quand un système effectue un travail, son énergie diminue d'autant.

Comme le travail, l'**énergie se mesure en Joules**.

Faute de pouvoir donner une définition générale d'énergie nous allons donner la définition de quelques formes d'énergie.

5.3.1 Énergie cinétique.

L'énergie cinétique d'une particule de masse m qui se déplace à vitesse v est:

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2$$

L'énergie cinétique totale de N particules est la somme des énergies cinétiques de chacune des particules:

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_i v_i^2$$

En particulier, l'énergie rotationnelle d'un objet est égale à la somme des énergies cinétiques de toutes les petites parties qui le forment. Ici l'énergie de chacune des particules est due à la vitesse due elle-même à la rotation.

Calculons le travail fourni par une force F appliquée, pendant un temps t à un objet de masse m initialement au repos.

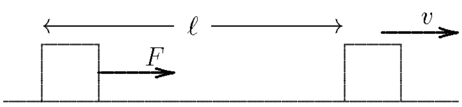


Figure 5.5 Une force F constante est appliquée à l'objet. Au bout d'un temps t il aura parcouru une distance ℓ et acquis une vitesse v.

Par la loi de Newton nous savons que $F = ma$, donc:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

d'où:

$$dv = \frac{F}{m}dt$$

Nous intégrons cette équation entre l'état initial ($v = 0$ et $t = 0$) et l'état final v et t:

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{F}{m}dt$$

$$v = \frac{F}{m}t$$

Le travail effectué par la force sera égal à F multiplié par la distance parcourue, laquelle est:

$$\ell = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

le travail est:

$$T = F\ell = \tfrac{1}{2}\frac{F^2t^2}{m} = \tfrac{1}{2}m\frac{F^2t^2}{m^2} = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{Ft}{m}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2$$

donc,

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2$$

Le travail effectué est exactement égal à l'énergie cinétique acquise par la particule. Ou, dit autrement, le travail s'est transformé en énergie cinétique.

5.3.2 Énergie potentielle mécanique.

L'énergie cinétique se voit. D'autres formes d'énergie sont moins visibles. Un ressort tendu ou comprimé. Un gaz comprimé dans un récipient. Une pile ou un accumulateur chargés. Un bâton de dynamite. Une locomotive soulevée par une grue. Dans tous ces exemples on trouve un système qui est capable d'effectuer un travail ou de fournir une énergie. Dans tous ces systèmes on trouve de l'énergie potentielle parce qu'ils sont potentiellement capables de fournir du travail ou de l'énergie.

Il n'est pas nécessaire que l'énergie potentielle soit facilement ou efficacement extractible. Par exemple, dans un verre d'eau vous avez une énorme quantité d'énergie potentielle. Malheureusement elle est très difficilement extractible car pour le faire il faut fusionner les noyaux d'hydrogène (comme dans les étoiles ou dans une bombe à hydrogène). Il n'empêche que l'énergie potentielle est là.

Nous allons nous intéresser ici à seulement deux types d'énergie potentielle: l'énergie d'un champ de gravitation, et l'énergie d'un ressort déformé.

Nous avons déjà calculé le travail pour soulever un corps de masse m à une hauteur h. Nous avions vu que ce travail était mgh. Nous avions aussi vu que si, au lieu de faire monter l'objet, nous le faisions descendre le travail à réaliser était négatif et égal à $-mgh$. Si les variations de hauteur h sont petites devant le rayon de la terre ($6366\,km$) on peut considérer que $\mathbf{g}$ est constante et l'**énergie potentielle due au champ de gravitation de la terre est** mgh. Ici h est mesuré par rapport à une hauteur de référence où nous avons placé le zéro d'énergie potentielle.

On peut récupérer cette énergie en laissant descendre l'objet. C'est ce qui se fait dans un barrage. L'énergie potentielle d'une masse m d'eau en haut du barrage est plus élevée de mgh de la même masse en bas du barrage (h étant la hauteur du barrage). Avec des dispositifs adéquats on peut récupérer une bonne partie de cette énergie potentielle. Ces dispositifs vont de la roue à aubes, utilisée depuis plus de 2000 ans, aux turbines actuelles.

Calculons l'énergie cinétique acquise par un objet de masse m qui tombe d'une hauteur h.

Nous avons déjà calculé la vitesse au bout d'une chute d'une hauteur h (voir exemple 1.1):

$$v = \sqrt{2gh}$$

cette vitesse correspond à une énergie cinétique de:

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m2gh = mgh$$

L'énergie potentielle que l'objet a perdu en tombant d'une hauteur h s'est transformée en énergie cinétique.

On peut faire le problème inverse: un objet part vers le haut avec une énergie cinétique E_c. Au sommet de sa course, quand l'énergie cinétique tombe à zéro combien vaut son énergie potentielle?

Avec une énergie cinétique E_c, sa vitesse de départ vaut:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

et avec cette vitesse initiale, la hauteur maximale est (voir exemple 1.2):

$$h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2E_c}{m}}{g} = \frac{E_c}{mg}$$

soit:

$$E_p = mgh = E_c$$

L'énergie potentielle en haut de la course est égale à l'énergie cinétique de départ: l'énergie cinétique s'est transformée en énergie potentielle.

Examinons maintenant un ressort déformé. Nous avions vu dans l'exemple 5.1 que l'énergie nécessaire pour déformer de L un ressort de constante k est $\frac{1}{2}kL^2$. **L'énergie potentielle d'un ressort de constante élastique k est $\frac{1}{2}kL^2$.**

Nous pouvons laisser se détendre le ressort en faisant que sa force pousse un objet de masse m:

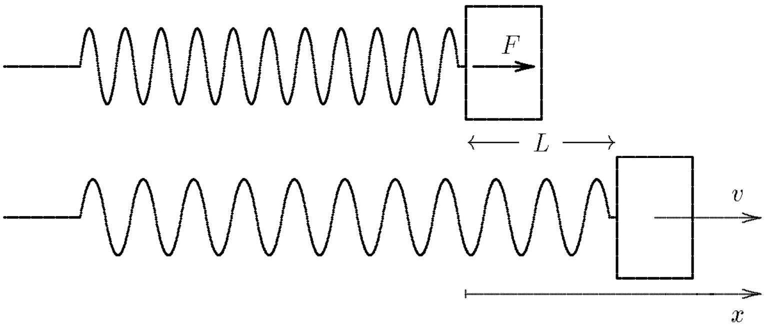


Figure 5.6 En haut le ressort est comprimé d'une longueur L. En bas il s'est détendu en poussant l'objet. La force diminue à mesure que le ressort se détend.

Nous choisissons l'axe des x parallèle au mouvement et avec l'origine à l'extrémité du ressort comprimé. La force appliquée par le ressort sur l'objet varie avec la position. Elle passe de kL pour $x = 0$ à zéro pour $x \geq L$. Il est immédiat que:

$$F(x) = k(L - x) \qquad\qquad (0 \leq x \leq L)$$

L'accélération est donc:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{k}{m}(L - x) \qquad\qquad (0 \leq x \leq L)$$

Dans le chapitre 1 nous avions trouvé la vitesse quand l'accélération était connue en fonction de la position (équation 1.3):

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 - \tfrac{1}{2}v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} a\,dx$$

dans notre cas v_1 et x_1 sont nuls.

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \int_0^L \frac{k}{m}(L - x)dx = \frac{k}{m}\left(L \cdot L - \tfrac{1}{2}L^2\right) = \frac{1}{m}\tfrac{1}{2}kL^2$$

d'où:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kL^2$$

Le terme de gauche est l'énergie cinétique et celui de droite est l'énergie potentielle élastique. L'énergie potentielle élastique s'est transformée en énergie cinétique.

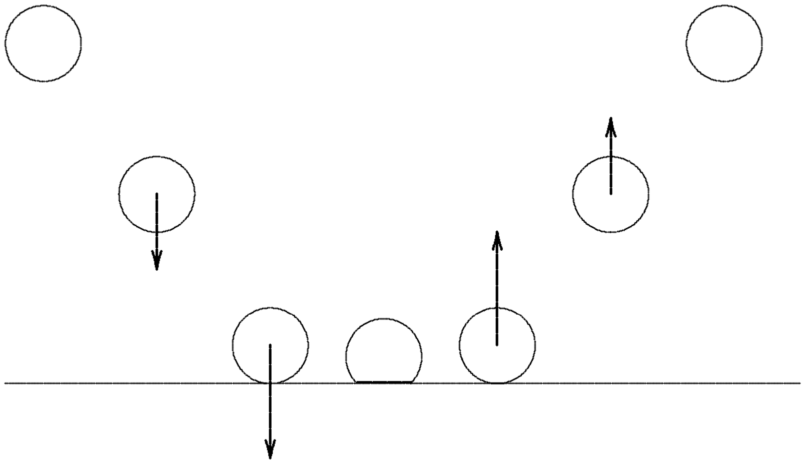


Figure 5.7 Au sommet de sa trajectoire, toute l'énergie de la balle est sous la forme d'énergie potentielle gravitationnelle. Au milieu de sa chute une partie de l'énergie potentielle s'est transformée en énergie cinétique. Au moment de toucher le sol, toute l'énergie potentielle s'est transformée en énergie cinétique. La balle s'écrase au sol en se déformant et en transformant l'énergie cinétique en énergie potentielle élastique. Par la suite le processus s'inverse. Il s'agit d'une chute verticale même si dans le dessin les différentes phases sont décalées horizontalement pour des raisons de clarté.

Le cas d'une balle ou un ballon qui rebondissent verticalement est exemplaire: en haut du rebond toute l'énergie est potentielle gravitationnelle. Pendant la chute l'énergie potentielle perdue se transforme en énergie cinétique. Cette dernière atteint un maximum au moment de l'impact au sol. La balle continue à descendre en se déformant et en transformant son énergie cinétique (et un zeste d'énergie potentielle) en énergie potentielle élastique. Après l'arrêt, les processus s'inversent: l'énergie élastique est transformée en énergie cinétique puis l'énergie cinétique est transformée en énergie potentielle gravitationnelle.

Dans la réalité une partie de l'énergie est transformée en énergie thermique: toute l'énergie cinétique n'est pas transformée en énergie élastique et toute l'énergie élastique n'est pas transformée en énergie cinétique. Le résultat est que la balle ne revient pas à sa hauteur initiale. Nous étudierons les chocs et les rebondissements dans un chapitre ultérieur.

Si les rebonds ne sont pas verticaux, la vitesse horizontale de la balle, la rotation de la balle, et l'énergie rotationnelle entrent en jeux. Cela donne parfois des rebonds très particuliers même pour une balle ronde.

Exemple 5.4 Looping.

Nous avons une rampe qui se continue par une boucle de rayon R. On lâche un chariot à une hauteur H sur la rampe. Voir figure 5.8.

À mesure que le chariot descend, il prend de la vitesse: l'énergie potentielle perdue se transforme en énergie cinétique. L'énergie totale, potentielle plus cinétique reste constante et égale à l'énergie potentielle initiale:

$$mgH = mgh + \tfrac{1}{2}mv^2$$

où h est la hauteur instantanée et v la vitesse instantanée du chariot. Quand le chariot se trouve dans la boucle, la hauteur h est:

$$h = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta)$$

L'énergie totale est donc:

$$mgH = mgR(1 - \cos\theta) + \tfrac{1}{2}mv^2$$

On peut déduire la vitesse en fonction de θ:

$$v = \sqrt{2gH - 2gR(1 - \cos\theta)}$$

Remarquez en passant que, en utilisant la conservation de l'énergie, nous avons pu calculer la vitesse sans nous préoccuper ni des forces ni des accélérations (méthode à retenir). L'expression de v que nous venons de calculer n'est pas valable dans tous les cas ni, surtout, pour toutes les valeurs de θ. En effet, la hauteur h calculée n'est valable que si le chariot reste sur la piste. L'autre situation dans laquelle l'expression de v n'est pas valable est quand H est trop petit par rapport à R et que θ est trop grand. Dans ce cas on peut se retrouver avec une expression négative sous la racine, ce qui veut dire, physiquement, que la situation ne peut pas arriver dans notre monde réel.

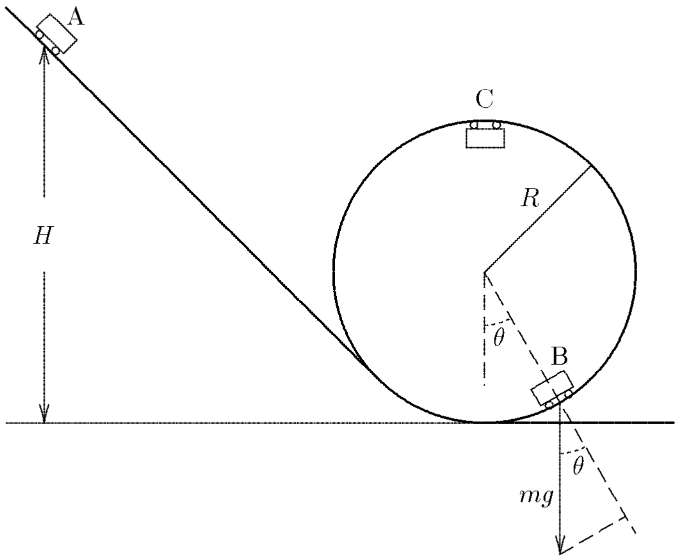


Figure 5.8 Quand le chariot descend, son énergie potentielle se transforme en énergie cinétique. En haut de la boucle (point C) la vitesse est la plus faible. Pour que le chariot ne décroche pas il faut que cette vitesse soit suffisamment élevée.

La réalité n'est pas bien compliquée. Ce que les mathématiques nous disent est que si la hauteur H à partir de laquelle on lâche le chariot est inférieure à $2R$, le chariot n'atteindra pas certains angles θ et certaines hauteurs h.

De quelle hauteur faut-il lâcher le chariot pour que le chariot reste sur la piste? On serait tenté de dire (sans trop réfléchir) que si on lâche le chariot d'une hauteur $H = 2R$, le problème est résolu car le chariot a suffisamment d'énergie pour arriver en haut de la boucle avec une vitesse juste nulle. Erreur! imaginez que le chariot se trouve effectivement en haut de la boucle avec une vitesse nulle (en réalité cette situation ne peut pas arriver). Que fait le chariot qui se trouve en C avec une vitesse nulle? Simplement il tombe verticalement. Pour que le chariot reste en contact avec la piste il faut que au point C le chariot ait encore une vitesse horizontale (vers la gauche). La condition limite est que au point C la force centripète soit exactement égale au poids du chariot. Le chariot est à la limite du décrochage.

Calculons la force N d'appui du chariot sur la piste. Cette force est formée par la composante du poids perpendiculaire à la piste (et dirigée vers elle) plus la réaction à la force centripète v^2/R:

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}$$

on peut remplacer v dans cette équation par la valeur déduite plus haut:

$$N = mg\cos\theta + \frac{m}{R}\left(2gH - 2gR(1-\cos\theta)\right) = mg\left(\cos\theta + \frac{2H}{R} - 2 + 2\cos\theta\right)$$

$$N = mg\left(\frac{2H}{R} - 2 + 3\cos\theta\right)$$

La condition limite du décrochage est $N = 0$ (le chariot effleure la piste sans appuyer). La situation où la normale est plus faible est pour la valeur plus négative de $\cos\theta$ c'est-à-dire -1. Cela nous donne la valeur limite de H:

$$H_{min} = \frac{5}{2}R$$

5.4 Vitesse et puissance.

Si l'on exerce une force F dirigée dans le sens des x sur un objet, et que l'objet se déplace dans le même sens, le travail est:

$$T = F\,x$$

Si le déplacement x se fait dans un temps t, la puissance développée sera:

$$P = \frac{T}{t} = F\frac{x}{t} = F\,v$$

Pour une même force, la puissance est d'autant plus élevée que la vitesse dans la direction de la force est plus importante.

Pour aller très vite en voiture ou en vélo il faut disposer d'une forte puissance. Cela est d'autant plus vrai, que la résistance de l'air (la force à appliquer) n'est pas constante mais augmente avec la vitesse.

5.5 Quelques machines élémentaires.

Une machine est un dispositif de multiplication des forces. Presque toutes sont connues depuis l'antiquité.

5.5.1 Levier.

"Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde" Cette phrase, attribuée à Archimède([5]), décrit l'utilité et le fonctionnement d'un levier. Il s'agit d'une barre rigide appuyée sur un point fixe. La charge agit sur un endroit de la barre et la force utile sur un autre. Suivant la disposition relative de la force, de la charge et du point d'appui, on peut avoir trois configurations différentes mais dont le fonctionnement est similaire.

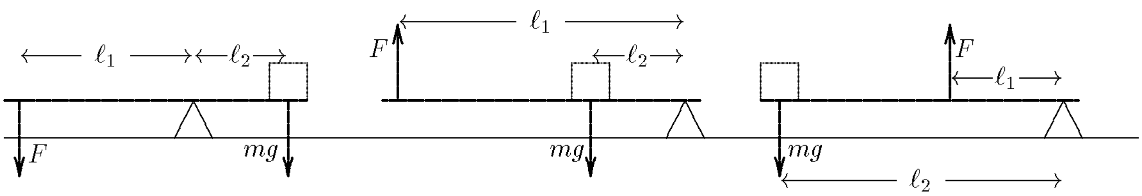


Figure 5.9 Trois configurations de leviers. Celle de droite est peu utilisée: au lieu de démultiplier la force, elle l'augmente.

On peut calculer les forces en utilisant la conservation de l'énergie: le travail fait par la force se transforme en augmentation d'énergie potentielle du système. La seule chose qui reste à calculer est la relation entre le déplacement de la force et celle du poids.

Prenons l'exemple de gauche. Si le levier tourne d'un petit angle θ (sens positif) la force descendra de $\ell_1\theta$ alors que le poids montera de $\ell_2\theta$. Le travail fait par la force sera $F\ell_1\theta$ et

([5]) Savant né à Syracuse (Sicile) (287-212 AC). Son œuvre scientifique est considérable: calcul de π par la méthode des périmètres, étude des solides générés par la rotation des courbes autour d'un axe. Principe d'Archimède (tout corps plongé dans un fluide subit une poussée vers le haut égale au poids du fluide déplacé). On lui attribue des inventions: vis sans fin, poulie mobile, roues dentées, miroirs ardents, etc. (quelques unes improbables). Il fut tué par un soldat lors de la prise de Syracuse par les romains.

l'augmentation d'énergie potentielle du poids sera $mg\ell_2\theta$. En posant les deux termes égaux et en divisant par θ:

$$F\ell_1 = mg\ell_2$$

Si ℓ_1 est très grand par rapport à ℓ_2, avec une toute petite force on peut soulever un très gros poids. Par contre le déplacement du poids sera très petit comparé à celui de la force.

La distance entre la force et le point d'appui est couramment appelée "bras de levier".

5.5.2 Coin.

Imaginons que les forces de friction sont nulles. Dans ce cas le travail fait par la force F_1 doit être égal au travail fait par la force F_c. Quand F_1 avance vers la gauche de ℓ, le coin soulève la charge de $\ell \tan\theta$:

$$F_1\ell = F_c\ell\tan\theta$$

on peut diviser par ℓ:

$$F_1 = F_c\tan\theta$$

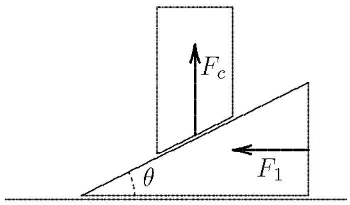


Figure 5.10 Quand on force le coin vers la gauche il soulève la charge. Dans ce dessin on suppose qu'il n'y a pas de friction.

Si l'angle est petit, le rapport des deux forces peut être très grand. Il faut reconnaître qu'ignorer les forces de friction dans le calcul d'un coin se situe vraiment loin de la réalité. Même si la friction gaspille du travail, dans le cas d'un coin, la friction sert à maintenir le coin en place. Dans l'exemple que nous venons de voir, si

$$F_1 < F_c\tan\theta$$

le coin sort et la charge descend.

Prenons en compte la friction. Appelons μ_1 et μ_2 les coefficients de friction du coin avec le support et avec la charge respectivement.

Du côté du support la force de friction bloquante est $\mu_1 F_c$ (si la force latérale dépasse cette valeur les deux surfaces "décrochent"). Du côté plan incliné, la force normale à la surface est $F_c/\cos\theta$. La force de "décrochage" est donc $\mu_2 F_c/\cos\theta$. Cette force est parallèle au plan incliné. La composante horizontale est:

$$\mu_2\cos\theta F_c/\cos\theta = \mu_2 F_c$$

La force de friction qui empêche le coin de "décrocher" est:

$$F_f = \mu_1 F_c + \mu_2 F_c$$

Ce qui pousse le coin vers la droite est la force que nous avions calculée sans tenir compte de la friction, c'est-à-dire $F_c\tan\theta$. Donc, pour que le coin reste, il faut que:

$$F_c\tan\theta < (\mu_1+\mu_2)F_c$$

L'angle ne dépend pas de la charge. Pour que le coin reste en place il faut que l'angle ne soit pas trop grand.

5.5.3 Palan.

"Le palan est une manœuvre composée de deux poulies, l'une fixe et l'autre mobile, et d'un cordage passant par elles. Le garant, cordage garnissant le palan, fait dormant par une extrémité à l'estrope d'une des poulies". Dans la figure nous avons représenté un palan double. Les poulies sont doubles et pour des raisons de clarté les poulies sont des poulies "violon" (l'une au dessus de l'autre). Généralement les poulies ont des réas (roues à gorge de la poulie) qui tournent sur un même essieu.

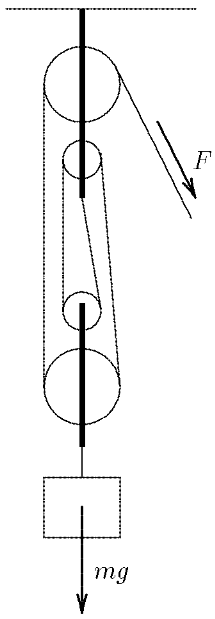


Figure 5.11 Palan composé de deux poulies doubles. La force est diminuée d'un facteur 4.

Pour calculer la force qu'il faut exercer pour équilibrer le poids mg nous allons utiliser le même raisonnement que dans les cas précédents: la conservation de l'énergie. Le travail fait par la force F se transforme en augmentation d'énergie potentielle du système.

Imaginons que nous tirons sur le garant (voir la définition savante plus haut) de sorte de remonter le poids d'une distance ℓ. Pour ceci il faut que chacun des quatre brins du garant raccourcisse de la même longueur ℓ. Cela veut dire que l'extrémité libre du garant avance de 4ℓ. Le travail fait par la force F est $T = 4F\ell$ et doit être égal à l'augmentation d'énergie potentielle $mg\ell$:

$$4F\ell = mg\ell$$

La force F est donc quatre fois plus faible que le poids qu'elle soulève. Mais, comme d'habitude, pour soulever le poids d'un mètre il faut tirer la corde de quatre mètres.

Curieusement on trouve que des palans sont encore utilisés au $21^{ème}$ siècle en France dans le bâtiment pour soutenir des échafaudages.

5.5.4 Vis sans fin.

On fait tourner la vis avec une manivelle de rayon r_1 en exerçant une force tangentielle F (dans la position du dessin la force sur la manivelle sort du papier). Quand on a fait un tour de manivelle, la force a parcouru une distance de $2\pi r_1$ et exercé un travail $2\pi r_1 F$. Pendant ce temps la vis a fait avancer la roue dentée d'un cran. Si la roue dentée possède N dents, elle aura tourné de $2\pi/N$ radians. Et le bras qui supporte la charge aura monté de $r_2 2\pi/N$. Le travail effectué est égal à l'augmentation d'énergie du système:

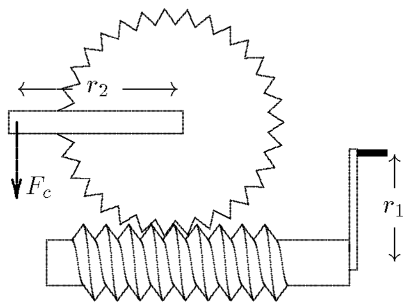


Figure 5.12 Vis sans fin. Quand la manivelle fait un tour la roue dentée tourne d'une dent.

$$2\pi r_1 F = F_c r_2 \frac{2\pi}{N}$$

donc:

$$F = F_c \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{N}$$

La réduction de forces peut être très grande avec un nombre très grand de dents. L'inconvénient est que des petites dents ont peu de résistance mécanique. Pour de grandes forces il faut des grosses dents. D'autre part la friction de la vis sur les dents peut être importante.

5.6 Exercices

1 - *Pour cet exercice je vous demande d'utiliser la méthode "longue": calculez la force, puis la distance pendant laquelle elle agit.*
Calculez le travail nécessaire pour faire passer une voiture de masse $m = 1000\,kg$ de l'arrêt à une vitesse de $90\,km/h$. Faites le calcul avec une accélération $a = 2\,m/s^2$, puis avec $a = 4\,m/s^2$. Expliquez le pourquoi de ce résultat.
R.N.: $3{,}125\,10^5\,J$.

2 - *Pour cet exercice je vous demande d'utiliser la méthode "longue": calculez la force, puis la distance pendant laquelle elle agit.*
Calculez le travail nécessaire pour arrêter la voiture de la question précédente ($m = 1000\,kg$ à $90\,km/h$). Faites le calcul pour un coefficient de friction entre les pneus et la chaussée de $\mu_d = 0{,}9$, puis $\mu_d = 0{,}5$. Expliquez le pourquoi de ce résultat.
R.N.: $3{,}125\,10^5\,J$.

3 - Calculez le travail effectué par une personne de $70\,kg$ pour monter de $6\,m$ (environ deux étages). Calculez la puissance utilisée si le temps de montée est de 10 secondes.
R.N.: $4120\,J$; $412\,w$.

4 - Une personne de $70\,kg$, qui n'exerce aucune activité physique, consomme une énergie journalière d'environ 2000 kilocalories soit environ $8{,}4\,MJ$. À quelle hauteur pourrait-elle monter si elle utilisait toute cette énergie pour monter?
R.N.: $12{,}2\,km$.

5 - La force d'attraction que la terre exerce sur une masse m située à une distance r du centre de la terre est:
$$F = A\frac{m}{r^2}$$
Le rayon de la terre vaut $R_\circ = 6366\,km$. La constante A vaut $A = gR_\circ^2 = 3{,}974\ 10^{14}\,N\,m^2/kg$. Calculez le travail W nécessaire pour faire monter un objet depuis la surface de la terre jusqu'à une hauteur h.
Montrez que, si $h << R_\circ$ le travail peut s'approcher par $W \simeq mgh$. Faites l'application numérique pour une masse $m = 1\,kg$ et une hauteur $h = 3\,km$, $h = 300\,km$ puis $h = 30\,000\,km$. Comparez les valeurs obtenues par la formule exacte et par la formule approchée.
R.N.: Formule exacte: $2{,}9406\,10^4 J$; $2{,}8096\,10^6 J$; $5{,}15\,10^7 J$.

6 - Satellite en orbite (suite de l'exercice 5). Pour un satellite en orbite circulaire, la force centripète est donnée par la force d'attraction gravitationnelle de la terre mg. Cette fois on ne peut pas considérer g comme constante: elle dépend de la hauteur de l'orbite. Calculez la vitesse que doit avoir un satellite qui orbite à une hauteur h au dessus de la surface de la terre, pour satisfaire l'égalité entre l'attraction de la terre et la force centrifuge.
Calculez l'énergie totale d'un satellite en orbite (hauteur h) en tenant compte que cette énergie est la somme de l'énergie potentielle gravitationnelle plus l'énergie cinétique.
Faites l'application numérique pour une masse de $1\,kg$ sur une orbite de $300\,km$ puis $36\,000\,km$.
R.: $E = \frac{mA}{2R_\circ}\frac{R_\circ+2h}{R_\circ+h}$; $3{,}26\ 10^7 J$ et $5{,}07\ 10^7 J$

7 - Un homme et un enfant sont en train de courir. La masse de l'homme est le double de celle de l'enfant mais son énergie cinétique est la moitié de celle de l'enfant. L'homme accélère de $1\,m/s$ et son énergie cinétique devient égale à celle de l'enfant. Calculez les vitesses initiales de l'homme et de l'enfant.
R.N.: $2{,}41\,m/s$ et $4{,}83\,m/s$.

8 - Une balle (projectile) de masse $m = 30\,g$ avec une vitesse initiale de $500\,m/s$ pénètre de $12\,cm$ dans un bloc en bois. Calculez la force moyenne exercée sur le bloc.
R.N.: $t = 31{,}25\,kN$.

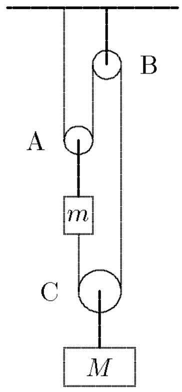
9 - Démontrez que pour un projectile lancé avec la même vitesse initiale v_0, la vitesse v qu'il aura quand il aura atteint une hauteur h sera la même indépendamment de l'angle α du lancement.

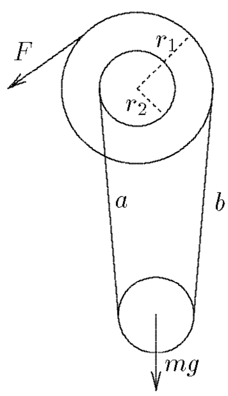
10 - Un escalier roulant de $12\,m$ de long relie deux étages avec une dénivellation de $7{,}5\,m$. Il avance à une vitesse de $0{,}6\,m/s$. Quelle puissance doit délivrer le moteur pour que l'escalier ait une capacité de 100 personnes par minute. Prenez une masse moyenne de $70\,kg$ par personne.
R.N.: $8605\,w$.

11 - Une pompe fait monter $1{,}2\,m^3$ d'eau par minute à une hauteur de $6\,m$. L'eau est éjectée avec une vitesse de $2\,m/s$. Calculez le travail fait par minute pour élever l'eau et celui pour lui donner la vitesse. Calculez la puissance utilisée par la pompe.
R.N.: $70632\,J$; $2400\,J$; $1217\,w$.

12 - Pour aller à grande vitesse une voiture doit vaincre surtout les forces de résistance aérodynamique. Si une voiture utilise $50\,HP$ pour rouler à $130\,km/h$, calculez la force aérodynamique qu'elle subit. Un HP (horse-power) équivaut à $745{,}7\,w$.
R.N.: $1032{,}5\,N$.

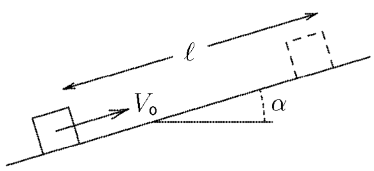
13 - Voici un drôle de palan. La masse m est soulevée par l'estrope de la poulie A et tirée vers le bas par son poids et par le garant. La masse M est tirée vers le bas par son poids et vers le haut par l'estrope de la poulie C. Pour toutes les poulies on néglige leur masse et la friction. Avec cette supposition, la tension T est la même sur toute le longueur du garant (la corde qui passe dans les poulies). Ce système est en mouvement. Il faut commencer par trouver la relation entre les mouvements de m et de M. Remarquez que quand la poulie A monte de h la masse m monte aussi de h. Au même temps la poulie A "lâche" une longueur $2h$ de garant. La poulie C voit le brin de gauche de son garant raccourcir de h et celui de droite s'allonger de $2h$. De combien descend C? (**attention:** ce n'est pas h, il faut réfléchir!). Maintenant que vous connaissez la relation entre les accélérations des deux masses vous pouvez écrire les deux relations $F = ma$. Calculez les accélérations et la tension T du garant. Analysez ce qui arrive quand la masse m tend vers zéro.
R.: $a_m = 2a_M$; $a_M = g\frac{M-2m}{M+4m}$; $T = g\frac{3Mm}{M+4m}$.



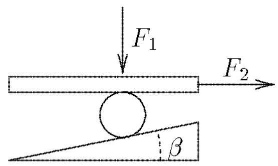


14 - Dans le palan de la figure les deux poulies d'en haut sont solidaires et le garant a est attaché à la petite poulie. C'est-à-dire, le garant s'enroule ou se déroule quand la poulie tourne. De ce fait, quand on tire sur l'extrémité libre du garant, on réduit le côté b du garant mais on allonge le côté a.
Si on tire sur l'extrémité libre une longueur ℓ, calculez le changement de hauteur de la poulie inférieure. Déduisez la valeur de la force F en fonction de mg et des rayons r_1 et r_2.
R.: $F = \frac{r_1 - r_2}{2\,r_1} mg$.

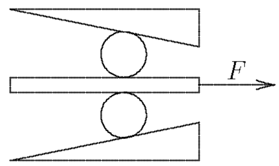
15 - Un objet de masse $m = 5\,kg$ est lancé vers le haut sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 16{,}7°$ avec un vitesse initiale de $V_0 = 10\,m/s$. Si l'objet glisse de $\ell = 10\,m$ avant de s'arrêter, calculez le coefficient de friction dynamique μ_d. Calculez l'énergie cinétique initiale, le travail fait par la force de friction et l'énergie potentielle gagnée par l'objet (il a gagné en hauteur). Faites la "comptabilité" des énergies.
R.N.: $\mu_d = 0{,}232$, $E_{c0} = 250\,J$, $W_f = 109\,J$ et $E_p = 141\,J$.



16 - Dans la partie haute du dessin de droite figure une plaque qui roule sur un cylindre, lequel roule sur un plan incliné d'un angle β. En négligeant le poids des objets, calculez la force F_2 qu'il faut exercer pour faire avancer (et monter) la plaque soumise à une force verticale F_1. Utilisez la méthode des travaux virtuels pour faire ce calcul.



Dans la partie basse du dessin on trouve un dispositif similaire à celui du haut du dessin, mais symétrique. Cette fois la plaque est coincée entre deux rouleaux lesquels roulent sur deux plans inclinés fixes. Il est facile de voir que l'on peut pousser la plaque vers la gauche, ce qui sépare les cylindres. Par contre, quand on tire la plaque vers la droite les cylindres se rapprochent et serrent la plaque. Celle-ci ne peut avancer vers la droite qu'en glissant sur les cylindres. Pour que la plaque puisse glisser il faut que le coefficient de friction entre la plaque et les cylindres soit suffisamment faible. Calculez le coefficient de friction minimum pour que la plaque se bloque pour un angle des plans inclinés β.



R.: $F_2 = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} F_1$; $\mu \geq \frac{1}{2}\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$.

Vélo: Dans les exercices qui suivent, les caractéristiques du vélo sont les suivantes:

- Rayon des pédales: 17 cm.
- Rayons des roues dentées du pédalier (plateaux): 6,5 7,5 et 8,5 cm.
- Rayons des roues dentées de la roue arrière (pignons): 7 choix allant de min: 3,5 cm à max 6 cm.
- Rayon de la roue arrière: 35 cm.
- Masse: 10 kg.

17 - Le cycliste a une masse de 70 kg. Il appuie de tout son poids sur chacune des pédales (en "danseuse" mais sans tirer sur le guidon). Calculez le travail qu'il effectue quand la pédale passe de sa position en haut à sa position en bas.
R.N.: 233,5 J.

18 - Le développement d'un vélo est la distance parcourue par celui-ci quand le pédalier fait un tour complet. Calculez le développement maximum et minimum du vélo.
R.N.: 5,34 m et 2,38 m.

19 - En imaginant qu'il n'y a pas de friction ni mécanique ni aérodynamique (cette dernière supposition est vraiment déraisonnable au dessus de 20 km/h), calculez qu'elle est la pente maximum que le vélo peut grimper avec les développements maximum et minimum et le cycliste appuyant de tout son poids comme dans l'exercice précédent. S'il peut développer une puissance de 500 w, calculez sa vitesse (le long de la pente) dans les deux cas. Calculez sa vitesse d'ascension (verticale).
R.N.: 6,4°et 14,5°; 20,6 km/h et 9,17 km/h; 0,637 m/s.

6. CONSERVATION DU MOMENT LINÉAIRE.

6.1 Centre de masses.

Jusqu'à présent nous avons travaillé avec des objets comme s'ils étaient des particules de dimension négligeable. Maintenant nous allons voir comment traiter des objets formés par plusieurs particules ou de dimensions finies (par opposition à infiniment petites).

Le **centre de masses** de deux particules de masses m_1 et m_2 situées aux distances x_1 et x_2 le long de l'axe x est, par définition, le point:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

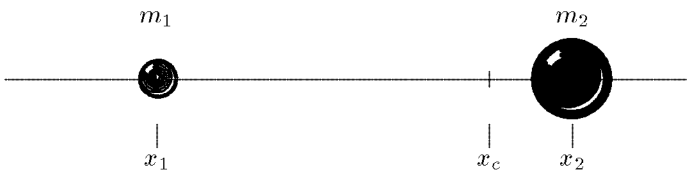


Figure 6.1 Le centre de masses de deux masses se trouve sur la ligne qui les rejoint. La distance à chaque masse est inversement proportionnelle à la masse.

À partir de la définition on trouve:

$$x_c m_1 + x_c m_2 = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$(x_c - x_1) m_1 = (x_2 - x_c) m_2$$

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{m_2}{m_1}$$

Autrement dit, la distance du centre de masses à chacune des masses est inversement proportionnelle à chaque masse.

On appelle parfois le centre de masses **centre de gravité**.

Quand on a plus de deux masses, la définition se généralise:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Si les particules ne sont pas alignées mais dans un plan ou dans l'espace, les deux ou trois coordonnées du centre de masses sont:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

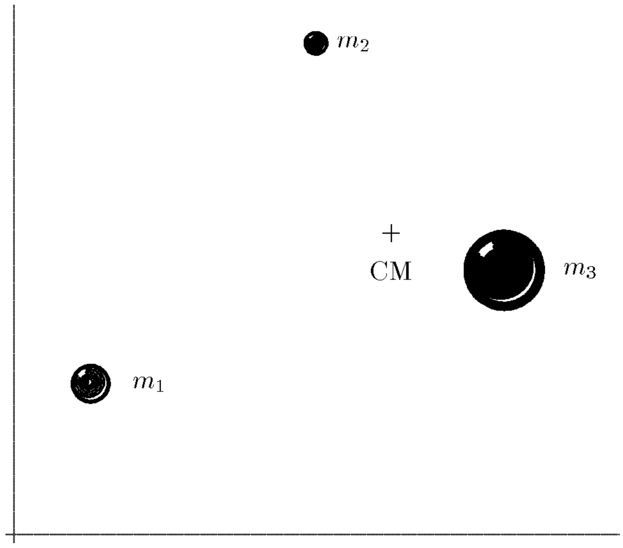


Figure 6.2 Le centre de masses de trois masses se trouve sur le plan qui les contient.

Quand nous avons affaire à un corps rigide, nous pouvons le traiter comme un nombre infini de petites masses dm. Dans ce cas on peut remplacer les sommes par des intégrales:

$$x_c = \frac{\int_V x dm}{\int_V dm} = \frac{1}{M}\int_V x dm$$

de même:

$$y_c = \frac{1}{M}\int_V y dm \qquad et \qquad z_c = \frac{1}{M}\int_V z dm$$

où M est la masse de l'objet et où l'indice V dans l'intégrale veut dire qu'il faut intégrer sur tout le volume de l'objet.

Calculons le centre de masses d'un parallélépipède droit (tous ses angles valent $\pi/2$) de masse M et de longueur L. Comme le problème est identique pour les trois coordonnées, nous ferons le calcul pour une seulement, que nous appellerons x.

Nous allons découper le parallélépipède en tranches d'épaisseur dx. La masse d'une telle tranche est:

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

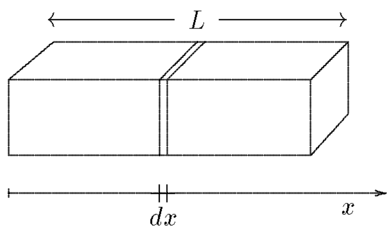


Figure 6.3 La masse de chaque tranche est $M dx/L$.

La position du centre de masses sera:

$$x_c = \frac{1}{M}\int_V x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\frac{M}{L} dx = \frac{1}{L}\int_0^L x dx = \frac{1}{L}\tfrac{1}{2}\left[x^2\right]_0^L = \frac{L}{2}$$

Le centre de masses d'un parallélépipède se trouve donc au centre géométrique de l'objet.

Avec ce résultat calculons où se trouve ce centre de masses d'une plaque triangulaire (plus élégamment on dirait un prisme triangulaire). Nous pouvons diviser le solide en lamelles parallèles à un des côtés d'un triangle. Le centre de masses de chaque lamelle se trouve au milieu de la longueur. Donc le centre de masses de l'ensemble des lamelles doit se trouver sur la droite qui joint les centres de masses des lamelles. Cette droite est une médiane([1]) du triangle. Si l'on répète l'opération pour les deux autres côtés, on trouvera que le centre de masses doit se trouver sur chacune des trois médianes et donc à l'intersection des trois, au **barycentre**.

En utilisant la même astuce on voit que le centre de masses d'une sphère se trouve au centre géométrique de la sphère et que le centre de masses d'un cylindre se trouve au milieu de l'axe de symétrie.

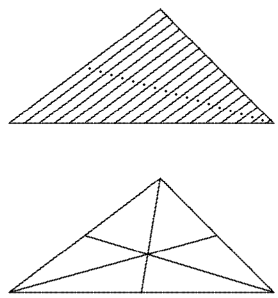


Figure 6.4 Le centre de masses d'un triangle se trouve à l'intersection des médianes.

6.2 Mouvement du centre de masses.

À partir de la définition de centre de masses d'un ensemble de particules nous pouvons écrire:

$$Mx_c = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$$

où M est la masse totale des particules et x_c est la coordonnée en x du centre de masses. Si nous dérivons par rapport au temps:

$$M\frac{dx_c}{dt} = m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{dx_n}{dt}$$

$$M\frac{dx_c}{dt} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \cdots + m_nv_{nx} \tag{6.1}$$

où v_{ix} est la composante en x de la vitesses de la i-ème particule. La composante en x de la vitesse du centre de masses est donc:

$$v_{cx} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iv_{ix}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Les équations pour les directions y et z sont similaires. On peut compacter les trois équations en une seule équation vectorielle:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

On peut dériver encore l'équation (6.1) pour obtenir les accélérations:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} + \cdots + m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}$$

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = m_1a_{1x} + m_2a_{2x} + \cdots + m_na_{nx}$$

([1]) Une médiane d'un triangle est le segment de droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé. Les trois médianes d'un triangle se coupent au tiers de leur longueur dans un point appelé **barycentre** (du grec $\beta\alpha\rho o\varsigma$ poids) où a_{ix} est la composante en x de l'accélération de la i-ème particule. Si nous appelons a_x l'accélération du centre de masses et F_{ix} la composante en x de la force appliquée sur la i-ème particule:

$$M a_x = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx}$$

Finalement, si l'on fait le même calcul pour les deux autres directions y et z, nous pouvons écrire:

$$M \vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

Donc la masse totale d'un groupe de particules multipliée par l'accélération du centre de masses de l'ensemble est égal à la somme des forces qui agissent sur les particules. Parmi les forces qui agissent sur les particules il peut y avoir des forces internes, c'est-à-dire des forces entre particules de l'ensemble et des forces extérieures. Or, la somme des forces internes est nulle car la force d'une particule sur une autre se compense par la réaction de la seconde sur la première. On peut donc écrire:

$$M \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext.} \tag{6.2}$$

Cette équation se lit: *"Le centre de masses d'un système de particules se déplace comme si toute la masse était concentrée au centre de masses et comme si toutes les forces externes étaient appliquées dans ce point"*.

Ce résultat est indépendant de la nature du système de particules. Il peut s'agir d'un corps rigide ou d'un ensemble de corps rigides plus un ensemble de particules. Il s'applique aussi bien à un électron isolé qu'à une galaxie.

Nous pouvons désormais étudier le mouvement de translation d'un corps comme si toute sa masse était concentrée dans son centre de masses et comme si toutes les forces étaient appliquées dans ce point. En réalité c'est ce que nous avons fait dans les chapitres précédents en traitant tous les corps comme s'ils étaient des particules.

Exemple 6.1 Centre de masses du système terre-lune. La masse de la terre est $5{,}98\,10^{24} kg$ celle de la lune est $7{,}347\,10^{22} kg$. La distance du centre de la terre au centre de la lune est $380\,000\,km$.

Prenons comme origine de coordonnées le centre de la terre:

$$x_c = \frac{5{,}98\,10^{24} \cdot 0 + 7{,}347\,10^{22} \cdot 3{,}8\,10^{8}}{5{,}98\,10^{24} + 7{,}347\,10^{22}} = 4{,}612\,10^{6}\,m = 4612\,km$$

Comme le rayon de la terre est de $6366\,km$, le centre de masses du système terre-lune se trouve plus près de la surface de la terre que du centre. Quand on dit que la terre décrit une ellipse autour du soleil, en fait ce n'est pas le centre de la terre qui le décrit, mais le centre de masses terre-lune. Le centre de la terre décrit une trajectoire qui ondule autour de la trajectoire elliptique avec une amplitude de $4612\,km$ et qui fait environ 13,4 ondulations pas an. Ces ondulations sont petites par rapport à la distance terre-soleil qui est de 150 millions de kilomètres.

Il faut remarquer que le centre de masses d'un objet ne se trouve pas toujours *dans* l'objet. Par exemple le centre de masses d'un anneau se trouve au centre de celui-ci, là où il n'y a pas de matière. Même situation pour le centre de masses d'un fer à cheval ou d'un boomerang.

6.3 Quantité de mouvement ou moment linéaire.

Le terme **moment linéaire**, ou **quantité de mouvement** d'une particule de masse m et de vitesse v est défini comme:

$$p = m\,v$$

(j'utilise p minuscule pour ne pas confondre avec la puissance). Comme la vitesse est une grandeur vectorielle, la quantité de mouvement l'est aussi et on peut redonner la définition plus générale:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Si l'on fait le rapprochement avec la loi de Newton $F = ma$, on constate que ma est la dérivée de mv par rapport au temps:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\,\vec{a}$$

Dans la dernière égalité nous avons supposé que la masse m ne varie pas avec le temps. Ceci n'est pas tout à fait exact pour des vitesses très élevées (vitesses relativistes), mais nous avions dit que nous ne nous occupions pas de ce type de phénomènes. On peut retenir que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Cela se lit "une force appliquée à une particule change sa quantité de mouvement" ou "si les forces appliquées à une particule sont nulles le moment ne change pas". Bon, ce n'est pas très intéressant tel quel. Il n'y a rien de surprenant à ce que, quand on ne fait rien, rien ne change. L'intérêt nous le retrouverons avec plusieurs particules et dans des processus où l'énergie cinétique ne reste pas constante.

Le moment linéaire ou quantité de mouvement d'un ensemble de particules est égal à la somme des moments de chacune des particules:

$$\vec{p}_T = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n$$

si l'on dérive:

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt}$$

Mais chacun des termes de droite représente la force appliquée à la particule:

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

La somme des forces internes s'annule car pour chaque force appliquée par une particule à une autre, la réaction de la seconde sur la première est égale et de signe opposé. Donc, dans la somme de toutes les forces qui agissent sur les particules il ne reste sans compensation que les forces externes:

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \vec{F}_{ext.}$$

Cette équation est la généralisation de l'équation pour une particule unique (le taux de changement de moment linéaire est égal à la force appliquée).

Nous pouvons aller un peu plus loin. L'équation (6.2) nous dit:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext.} = \frac{d}{dt}M\vec{v}_{CM}$$

ici M est la masse totale et $\vec{a}$ est l'accélération du centre de masses. En combinant les deux équations nous trouvons:

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \frac{d}{dt}M\vec{v}_{CM}$$

d'où on tire:

$$\vec{p}_T = M\vec{v}_{CM}$$

Cela veut dire que la quantité de mouvement d'un ensemble de particules est égale à celle d'une particule qui aurait sa masse égale à la somme de l'ensemble et qui se déplacerait avec la vitesse du centre de masses.

La morale de ces calculs est que, quand nous avons un ensemble de particules ou de corps rigides, on peut se simplifier la vie en le calculant comme une seule particule de masse égale à la somme de toutes les masses concentrées au centre de masses de l'ensemble. Sur ce point on applique la résultante de toutes les forces externes. La vitesse, l'accélération et la quantité de mouvement ainsi obtenues seront les valeurs du centre de masses de l'ensemble.

Bien sûr, le résultat est un résultat global duquel vous ne pouvez pas, dans tous les cas, obtenir les vitesses ou les positions de particules individuelles. Mais dans bien des cas ce résultat suffit largement. Notamment quand l'ensemble de particules constitue un objet rigide: si vous connaissez la position et la vitesse de centre de masses, vous connaissez la position et les vitesses de toutes les particules qui le forment([2]).

La conséquence plus remarquable de ce que nous venons de calculer est que, dans un système sur lequel n'agissent pas de forces externes $\vec{F}_{ext} = 0$, le moment linéaire ou quantité de mouvement se conserve. Et ceci est vrai même si l'énergie cinétique de l'ensemble de particules ne se conserve pas. Par exemple, à la suite de chocs entre particules, une partie de l'énergie cinétique peut se transformer en énergie thermique ou en énergie potentielle élastique, ou vice-versa.

Prenons un exemple très élémentaire: deux corps de masses m_1 et m_2 peuvent glisser sans friction sur un support horizontal. Au début de l'expérience ils sont à l'arrêt, mais séparés par un ressort comprimé et tenus ainsi par un dispositif qui les empêche de se séparer (par exemple une ficelle entre les deux objets).

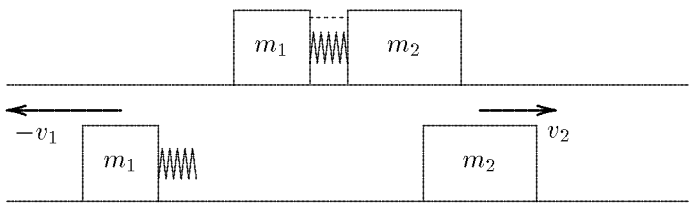


Figure 6.5 Au moment où on coupe la ficelle le ressort pousse chacun des objets avec la même force et dans des directions opposées.

La force du ressort est compensée par celle de la ficelle. Quand on coupe la ficelle, le ressort exerce une force vers la droite sur l'objet de droite et exactement la même vers la gauche sur l'objet de gauche. Cette force va changer à mesure que les objets s'éloignent, mais elle restera toujours identique dans les deux sens.

Appelons F la force que le ressort exerce sur l'objet 2 (celui de droite). D'après Newton:

$$F = m_2 a_2 = m_2 \frac{dv_2}{dt}$$

en passant dt à gauche:

$$F dt = m_2 dv_2$$

Maintenant nous allons intégrer cette équation entre le moment où l'on coupe la ficelle et le moment où le ressort ne touche plus l'objet de droite. C'est-à-dire, pendant le temps où la force F est différente de zéro.

$$\int_d^f F dt = \int_d^f m_2 dv_2$$

Ici les limites de l'intégrale d et f indiquent deux situations: le début et la fin et non les valeurs f et d. Les vraies valeurs numériques des limites des intégrales - si réellement nous en avons besoin - il faudra les trouver.

Dans le terme de droite l'intégrale est immédiate: $m_2(v_{2fin} - v_{2init})$. Ici $v_{2init} = 0$ car, au départ les objets étaient à l'arrêt. v_{2fin} est la valeur finale que l'objet conservera puisqu'il n'y a pas de friction. Nous l'appellerons simplement v_2:

$$m_2 v_2 = \int_d^f F dt$$

Pour l'objet de gauche la situation est similaire, sauf que la force est dirigée vers la gauche et que v_1 sera aussi dirigée vers la gauche. En considérant les grandeurs positives vers la droite nous écrivons:

$$\int_d^f -F dt = \int_d^f m_1 dv_1 = m_1(v_{1fin} - v_{1init}) = m_1 v_1$$

([2]) Vous vous êtes peut-être aperçus que je n'ai pas écrit le mot "rotation" une seule fois. Si les objets tournent il faut connaître l'état de rotation... et d'autres choses. Mais nous aurons de nouvelles grandeurs physiques qui se conservent.

Remarquez que l'intégrale de la force est la même qu'auparavant sauf que le signe est opposé. En additionnant les deux équations les deux intégrales s'annulent:

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Le moment linéaire est resté le même (zéro). On sent mieux la raison pour laquelle les forces internes ne changent pas le moment linéaire. Ce qui change le moment linéaire est une force pendant un temps et le changement de moment ne dépend que de ça: de la force et du temps d'action. Le changement de moment ne dépend pas de la masse ni de la vitesse de la particule ni du corps sur lequel la force agit.

Dans certains cas l'intégrale de la force pendant un temps court (ce qui ne veut pas dire grand chose) est appelée **impulsion**. Ce nom est réservé à des forces qui agissent pendant de courts intervalles et dont ni la dépendance de la force ni même la durée de son action ne sont bien connues. Un exemple est l'impulsion exercée par la tête d'un clou pour arrêter le marteau. On connaît la masse et la vitesse du marteau et donc son moment linéaire. Le clou arrête le marteau. Si le clou entre dans un matériau mou qui demande peu de forces pour pénétrer, la force que le clou exercera sur le marteau sera faible et l'impact (impulsion) durera plus longtemps et le clou s'enfoncera beaucoup. Si le matériau est rigide, la force sera grande, mais l'impulsion courte et le clou s'enfoncera peu. Avec le même marteau et la même vitesse de frappe, l'obstacle: clou, doigt, etc., devra exercer une impulsion identique. Un autre exemple d'impulsion est celle donnée par la raquette à la balle et vice-versa (tennis ou ping-pong).

Dans l'exemple que nous venons de voir le système avait, au départ, un moment linéaire nul et une énergie cinétique, elle aussi, nulle. Prenons un exemple différent. Cette fois nous avons deux objets de masses m_1 et m_2 qui glissent sans friction sur un support horizontal. La situation est telle que les deux objets vont entrer en collision. On a placé, à l'endroit de la collision une matière très plastique([3]) comme de la pâte à modeler de sorte qu'après le choc les deux objets resteront collés.

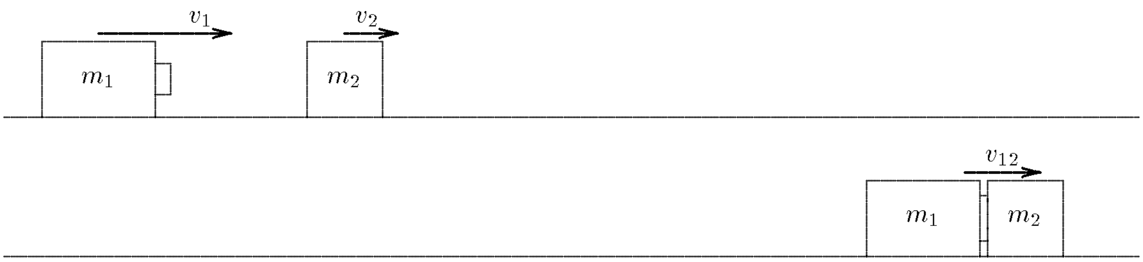


Figure 6.6 Choc plastique: après l'impact les deux objets restent collés.

Avant le choc, le moment linéaire de l'ensemble est:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Après le choc le moment linéaire reste le même:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{12}$$

où v_{12} est la vitesse du nouvel objet formé par les deux originaux. La vitesse finale est donc:

$$v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Cette fois nous avons perdu de l'énergie cinétique. Cette énergie "perdue" s'est transformée en énergie thermique: la pâte à modeler s'est réchauffée en se déformant.

([3]) Du grec "plastikos": relatif au modelage. Parmi plusieurs autres significations, le mot plastique désigne un matériau mou et non élastique: quand on le déforme il ne revient pas à sa forme originelle. L'argile et la pâte à modeler sont plastiques alors que le caoutchouc est élastique.

Exemple 6.2 Recul d'un fusil.

Un fusil ancien, le *springfield*, avait une masse de 4,4 kg et tirait une balle de 9,73 g à une vitesse de 823,5 m/s. Calculons la vitesse de recul du fusil s'il n'était pas tenu.

La quantité de mouvement avant le tir est zéro puisque le fusil est à l'arrêt. La quantité de mouvement de la balle est:

$$p = mv = 9{,}73\,10^{-3} 823{,}5 = 8{,}01\, kg\, m/s$$

La quantité de mouvement du fusil sera la même (mais dans la direction opposée). La vitesse du fusil sera donc:

$$v = \frac{8{,}01}{4{,}4} = 1{,}82\, m/s$$

Il parait que ce recul finit par faire mal à l'épaule.

Exemple 6.3 Recul d'un jet (jet d'eau, jet d'un réacteur, etc.).

Calculons la force F nécessaire pour éjecter une masse m à vitesse v dans un temps t. Avec la force F nous accélérons la masse m d'une accélération a:

$$a = \frac{F}{m}$$

La vitesse acquise dans un temps t sera:

$$v = at = \frac{F}{m}t$$

d'où on extrait la force:

$$F = \frac{m}{t}v$$

Dans le cas d'un jet continu de masse, le terme $\frac{m}{t}$ est le nombre de kilogrammes par seconde éjectés à vitesse v. Ce calcul est valable pour tout type de jet: lance d'arrosage ou d'incendie, jet d'air d'un réacteur ou d'une hélice, mitrailleuse, etc.

Exemple 6.4 Pendule balistique.

Les fabricants d'armes eurent besoin de mesurer la vitesse de leurs projectiles à une époque où l'électricité n'était pas encore née. Des physiciens trouvèrent la façon de faire la mesure sans utiliser d'autres appareils que la balance et le mètre. L'invention était le pendule balistique. Il s'agit simplement d'un lourd bloc de bois accroché comme un pendule et avec la possibilité de mesurer l'amplitude des oscillations (en mesurant θ ou h (voir figure)). Le projectile était tiré sur le bloc de bois et s'incrustait dans celui-ci en lui communiquant sa quantité de mouvement.

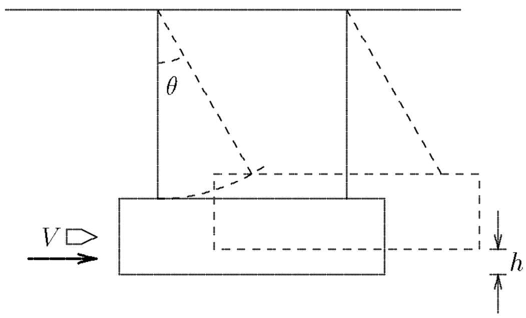


Figure 6.7 Pendule balistique. Le projectile communique son moment au lourd bloc en bois.

Si la masse de la balle est m, celle du bloc M et la vitesse de la balle est V, le moment linéaire avant l'impact est:

$$p = mV$$

le moment linéaire doit être conservé après l'impact:

$$p = mV = (m + M)v$$

où v est la vitesse du bloc de bois après l'impact. L'énergie du bloc devient:

$$E = \tfrac{1}{2}(m + M)v^2 = \tfrac{1}{2}(m + M)\left(\frac{mV}{m + M}\right)^2$$

et cette énergie lui permet de monter d'une hauteur h:

$$\tfrac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mV}{m+M}\right)^2 = (m+M)gh$$

d'où l'on tire:

$$V^2 = 2gh\left(\frac{m+M}{m}\right)^2$$

Exemple 6.5 Fusée.

Le principe de toutes les fusées, aussi bien des petites fusées des feux d'artifice privés que de la fusée Saturne V([4]), est le suivant. La fusée expulse, vers l'arrière, des gaz à la plus grande vitesse possible. La conservation de la quantité de mouvement crée un effet de recul qui constitue la poussée de la fusée.

Imaginons une fusée de masse M qui avance à vitesse V et qui expulse, à vitesse u vers l'arrière, une petite masse dm.

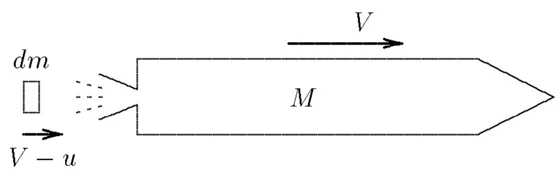


Figure 6.8 Fusée. En réalité u est beaucoup plus grand que V et la masse éjectée part vers l'arrière.

La conservation du moment linéaire nous dit:

$$MV = (V-u)dm + (M-dm)(V+dV)$$

(après l'expulsion la nouvelle masse de la fusée est $M - dM$ et la nouvelle vitesse est $V + dV$). En développant:

$$MV = Vdm - udm + MV - Vdm + Mdv - dm\,dV$$

on ignore le terme $dm\,dV$ car il est petit par rapport aux autres. Il nous reste:

$$u\,dm = MdV$$

Maintenant, au lieu d'expulser une petite masse dm une seule fois, on recommence toutes les dt secondes, c'est-à-dire, l'objet expulse dm/dt kilogrammes par seconde à la vitesse u. On peut diviser l'équation par dt:

$$u\frac{dm}{dt} = M\frac{dV}{dt} = Ma = F$$

Le terme $M\frac{dV}{dt}$ n'est autre chose que la force de recul produite par l'expulsion de la masse vers l'arrière. Autrement dit, c'est la poussée.

Mais tout ceci se fait au détriment de la masse de la fusée. Quand il ne lui restera plus de masse à expulser elle s'arrêtera d'accélérer. Calculons quelle sera sa vitesse finale une fois tout le combustible épuisé. À la fin il ne restera que la charge utile plus la masse du réservoir et du moteur. Appelons M_f la masse finale.

$$u\frac{dm}{M} = dV$$

<u>Attention:</u> dm est la petite masse expulsée qui est évidemment positive. Mais elle correspond à une variation dM de la masse de la fusée qui est, elle, négative:

$$dm = -dM$$

on intègre depuis la situation initiale: $V = 0$ et $M = M_\circ$, jusqu'à la situation finale: $V = V_f$ et $M = M_f$:

$$\int_{M_\circ}^{M_f} u\frac{-dM}{M} = \int_0^{V_f} dV$$

([4]) Fusée utilisée pour les missions Apollo pour envoyer des hommes sur la lune. La plus grosse fusée jamais utilisée. Masse initiale: 3038 tonnes. Poussée initiale: 33,7 MN, longueur 102 m, diamètre 10,1 m.

$$u \ln \left(\frac{M_0}{M_f} \right) = V_f$$

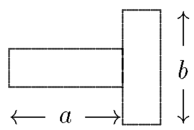
Voila le gros problème des fusées: une augmentation de la masse initiale augmente peu la vitesse finale car celle-ci n'augmente qu'avec le logarithme du rapport de masses. Pour augmenter la vitesse finale il est très intéressant d'augmenter la vitesse d'expulsion des gaz. Ceci demande des pressions et des températures énormes dans la chambre à combustion.

Dans le calcul que nous venons de faire nous n'avons pas tenu compte de la force de gravité. Tout se passait dans l'espace. Pour lancer une fusée à partir de la terre il faut tenir compte du poids de la fusée qui se soustrait à la poussée du moteur. Si l'on veut que la fusée s'élève il faut déjà que la poussée soit supérieure au poids.

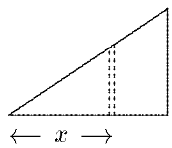
Signalons que le rendement énergétique d'une fusée est ridicule. La plupart de l'énergie est gaspillée à réchauffer des gaz et à les envoyer à grande vitesse vers l'arrière. L'énergie "utile", l'énergie cinétique de la masse finale est très, très petite comparée à l'énergie totale dépensée.

6.4 Exercices.

1 - Calculez la position du centre de masses de deux parallélépipèdes de longueurs a et b, disposés en forme de T (voir figure). Les deux morceaux sont du même matériau et ont une largeur ℓ et une épaisseur e.
R.: $\left(a^2 + 2ab + \ell b\right)/2\,(a+b)$ à partir de la base du T.



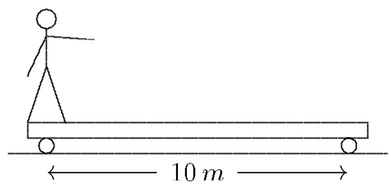
2 - Calculez la position, suivant l'axe horizontal, du centre de masses de ce triangle rectangle pour retrouver le résultat annoncé dans le fascicule que le centre de masses d'un triangle se trouve à 1/3 de la hauteur (ou à 2/3 de la pointe!).



3 - Calculez la position du centre de masses d'une plaque semi-circulaire d'épaisseur uniforme.
R.: $\frac{4}{3\pi}R$.

4 - Calculez la position du centre de masses d'une demi sphère uniforme. R.: $\frac{3}{8}R$.

5 - Un homme de $70\,kg$ se trouve sur une extrémité d'une plateforme (initialement à l'arrêt) de $140\,kg$ qui peut rouler sans friction sur le sol horizontal. Calculez la position horizontale du centre de masses de l'ensemble. L'homme se met à marcher à vitesse $v = 4\,km/h$ (par rapport au sol) vers l'autre extrémité de la plateforme. Calculez la vitesse de la plateforme. Arrivé à l'autre extrémité l'homme s'arrête. Calculez les nouvelles vitesses et les nouvelles positions des centres de masses (homme, plateforme, ensemble). De combien a avancé l'homme par rapport au sol? La plateforme fait $10\,m$ de long et son centre de masses se trouve au milieu. Qu'est ce qui change si, au lieu de marcher, l'homme se met à courir à $8\,m/s$.
R.N.: C.M. à $1{,}67\,m$ à gauche du centre; $v_p = -0{,}55\ldots m/s$; $6{,}67\,m$.



6 - Une balle de fusil de $13\,g$ de masse, avec une vitesse de $330\,m/s$ rentre dans un bloc de bois de $2\,kg$ de masse et ressort de l'autre côté avec une vitesse de $270\,m/s$. Si le bloc en bois était originellement au repos sur une surface sur laquelle il peut glisser sans friction, à quelle vitesse se trouve t-il quand la balle ressort?
R.N.: $0{,}39\,m/s$.

7 - Elliot Ness utilisait la mitrailleuse Thomsom M1 qui tirait des balles calibre .45 de 12 grammes à un rythme de 700 coups par minute. La vitesse de sortie des balles était de 275 m/s. Calculez la force moyenne qu'il devait exercer pour compenser le recul.
R.N.: 38,5 N.

8 - Un hélicoptère en vol stationnaire, se maintient en l'air en envoyant vers le bas $X\ kg/s$ d'air à vitesse v. On admet qu'un cylindre d'air de rayon R égal à la longueur des pales du rotor est envoyé vers le bas à vitesse uniforme v. Montrez que $X = \rho\pi R^2 v$ (où ρ est la densité de l'air). De là déduisez la poussée exercée par le rotor. Démontrez que la puissance fournie à l'air par le rotor est $\frac{1}{2}\rho\pi R^2 v^3$. Calculez la puissance pour maintenir en l'air un hélicoptère *Colibri* (Eurocopter) de masse 1,5 tonnes, sachant qu'avec son rotor de 10 m de diamètre il propulse l'air à 12 m/s. Densité de l'air: 1,3 kg/m^3. Montrez que pour avoir la même poussée avec moins de puissance il faut que v soit plus petite et que R soit plus grand.
R.N.: 88,2 kw (La vrai puissance du moteur du *Colibri* est 4 fois plus grande).

9 - Une lance à incendie a un diamètre de sortie de 50 mm et est capable d'envoyer l'eau à 50 m à la verticale. Calculez la vitesse de sortie de l'eau, le débit de la lance et la force de recul de la lance.
R.N.: 31,3 m/s, 61,5 ℓ/s, 1926 N.

7. COLLISIONS.

Dans la vie courante on essaye d'éviter des collisions. Les collisions sont accompagnées de changements de vitesse importants ce qui implique de grandes accélérations et de grandes forces qui impliquent des dégâts ou des désagréments. Des collisions sont parfois recherchées dans certains sports ou passe-temps (boules, billard, golf, polo, bowling, etc.).

Mais les collisions de loin les plus nombreuses sont celles qui ont lieu à l'échelle microscopique, entre molécules, atomes et électrons. Les molécules des gaz de l'air passent leur temps à s'entrechoquer ou à rebondir sur les solides ou les liquides qu'elles rencontrent. Les molécules des liquides font de même. Finalement, les électrons dans les solides s'entrechoquent entre eux ou avec les atomes du solide.

Ces collisions sont responsables des échanges de chaleur et notamment du flux de chaleur des substances plus chaudes vers les parties plus froides. Elles permettent aussi des réactions chimiques dans les gaz et dans les liquides. Pratiquement toutes les réactions biochimiques de la vie ont lieu lors de collisions entre molécules.

À un niveau encore plus petit, les réactions entre particules élémentaires (électrons, neutrons, quarks, etc.) comportent des collisions.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à des collisions entre objets simples qui ressemblent plus à des atomes ou à des neutrons qu'à des boules de billard. La raison est que des boules de billard peuvent tourner (autour de n'importe quel axe) ce qui modifie la collision. Nous ne prendrons que des objets qui ne tournent pas. Malgré cette restriction, beaucoup des résultats que nous allons trouver décrivent assez bien le comportement des objets macroscopiques dans des collisions...sans trop de rotations.

7.1 Collisions en une dimension.

Les collisions en une dimension sont très rares dans la nature. Il s'agit, par exemple du choc entre deux balles ou entre deux billes dont les deux centres se déplacent sur une même droite. C'est un choc central à la suite duquel les deux billes continuent à se déplacer le long de la même droite. On peut obtenir, dans la pratique, des collisions à une dimension en maintenant les objets sur une trajectoire droite déterminée par un mécanisme de guidage (des rails, par exemple). Le seul intérêt d'étudier ce type de collisions est la simplicité du processus et des calculs à faire.

Prenons deux objets de masses m_1 et m_2 qui se déplacent sur une droite à des vitesses (avant le choc) u_1 et u_2(1).

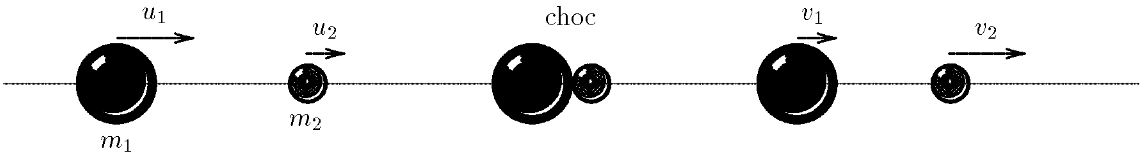


Figure 7.1 Avant le choc l'objet de gauche rattrape celui de droite. Après les objets s'éloignent.

Nous avons déjà mentionné le fait que, dans certaines collisions, l'énergie cinétique est conservée et que, dans d'autres, une partie ou toute l'énergie cinétique se transforme en chaleur ou en un autre type d'énergie (potentielle, par exemple). Les collisions qui se classent dans le premier

(1) Je copie la notation sur le Resnick-Halliday: les vitesses d'avant le choc sont des u et celles d'après sont des v.

type reçoivent le nom de **collisions élastiques** ou **collisions complètement élastiques**. Dans le deuxième cas les collisions sont des **collisions inélastiques**. Dans le cas où le maximum d'énergie cinétique est transformée on a des **collisions totalement inélastiques**.

Commençons par faire le calcul pour le cas où toute l'énergie cinétique est conservée. Dans ce cas:

$$\tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

D'autre part, le moment linéaire est toujours conservé:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \tag{7.1}$$

Nous avons un système de deux équations à deux inconnues (v_1 et v_2). En multipliant par deux la première équation et en regroupant dans les deux équations les termes correspondants à chaque objet nous pouvons écrire:

$$m_1\left(u_1^2 - v_1^2\right) = m_2\left(v_2^2 - u_2^2\right)$$
$$m_1\left(u_1 - v_1\right) = m_2\left(v_2 - u_2\right)$$

En divisant la première équation par la seconde([2]):

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$

soit:

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1$$

Le terme $u_1 - u_2$ est la vitesse à laquelle se rapprochent les deux objets avant le choc (la vitesse relative entre les deux). Et le terme $v_2 - v_1$ est la vitesse à laquelle les deux objets s'éloignent après le choc. Autrement dit: dans un choc complètement élastique la vitesse relative entre les objets s'inverse au moment du choc. S'ils se rapprochaient à vitesse v, après ils s'éloignent à la même vitesse v.

On constate par l'expérimentation que ce qui caractérise les chocs entre deux objets donnés est le rapport entre la vitesse relative avant et après le choc. Par exemple, si vous faites rebondir une balle au sol, à chaque rebond la vitesse du rebond sera 80% de la vitesse d'impact. Si vous faites la même expérience avec une autre balle vous obtiendrez, peut-être, 95% ou 60%. Mais pour chaque balle le même coefficient se répète. On définit le **coefficient de restitution** e comme le rapport (inversé de signe) entre la vitesse relative après le choc et la vitesse relative avant le choc.

$$\textbf{Coefficient de restitution} = e = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2} \tag{7.2}$$

La valeur du coefficient de restitution est comprise entre 1 pour des collisions totalement élastiques et zéro pour des collisions totalement inélastiques.

Pour trouver les valeurs des vitesses après la collision pour un coefficient de restitution donné e, nous sortons la variable v_2 de la définition 7.2:

$$v_2 = v_1 + e(u_1 - u_2)$$

et la remplaçons dans l'équation 7.1:

$$m_1v_1 + m_2\left(v_1 + e(u_1 - u_2)\right) = m_1u_1 + m_2u_2$$

d'où on extrait v_1:

$$v_1 = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} - e\frac{m_2}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2) \tag{7.3}$$

en faisant la même opération pour v_2 on trouve:

$$v_2 = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} + e\frac{m_1}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2) \tag{7.4}$$

([2]) Rappel: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Remarquez que le premier terme dans les deux dernières équations est la vitesse du centre de masses du système. Ces équations s'allègent si l'on travaille dans le référentiel du centre de masses.

Remarquez aussi que pour un choc totalement inélastique ($e = 0$), on retrouve le résultat que nous connaissions, à savoir que, comme les deux objets restent collés, la vitesse finale des deux objets est la même et égale à celle du centre de masses.

Exemple 7.1 La balle qui rebondit. Prenons une balle qu'on laisse tomber sur une surface horizontale solide. La masse de la balle sera m, et la hauteur de chute $h_\circ$. L'objet 2 n'est autre que la terre elle même dont la masse est immensément plus grande que celle de la balle. L'équation 7.3 devient (limite quand $m_2 \to \infty$):

$$v_1 = u_2 - e(u_1 - u_2)$$

mais u_2 est la vitesse de la terre qui est égale à zéro puisque nous mesurons les vitesses par rapport à la terre. Donc:

$$v_1 = -eu_1$$

Quand la balle rebondit au sol, sa vitesse s'inverse et sa valeur absolue est, en pratique, plus faible que la vitesse d'arrivée.

Si la balle est descendue d'une hauteur $h_\circ$ sa vitesse d'arrivée sera:

$$v_1 = \sqrt{2gh_\circ}$$

la vitesse du rebond sera:

$$u_1 = ev_1$$

et la hauteur à laquelle la balle remontera sera: $h_1 = \frac{u_1^2}{2g}$. En remplaçant:

$$h_1 = \frac{e^2 2gh_\circ}{2g} = e^2 h_\circ$$

Pour le nouveau rebond la balle part d'une hauteur réduite d'un facteur e^2, et pour le suivant la hauteur sera encore réduite de e^2, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Jusqu'à l'infini? Eh non! Un résultat amusant est que, même si théoriquement le nombre de rebonds est infini, le temps mis pour les faire est fini.

Le temps pour arriver à la hauteur h_1 est $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Donc le temps total du premier rebond (montée et descente) sera:

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Le rebond suivant montera à une hauteur $h_2 = e^2 h_1$ et le temps sera:

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 2\sqrt{\frac{2e^2 h_1}{g}} = e2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = et_1$$

pour les rebonds suivants les temps seront $e^2 t_1, e^3 t_1, e^4 t_1, \ldots$. Mais la somme de tous ces temps est finie. Le temps de tous les rebonds sera:

$$t_1(1 + e + e^2 + e^3 + \cdots) = \frac{t_1}{1 - e}$$

Ce résultat est amusant et ne présente aucun intérêt en physique. Il prouve néanmoins que, théoriquement([3]), on peut avoir un nombre infini de processus physiques qui se déroulent dans un temps fini. Ceci montre l'idiotie des raisonnements sophistes comme celui de *"Achille et la tortue"*

([3]) Dans la pratique, les rebonds s'arrêtent quand leur fréquence atteint celle des modes d'oscillations propres de la balle.

qui sont basés sur l'hypothèse cachée qu'il est impossible d'avoir un nombre infini de subdivisions imaginaires dans un temps fini.

Exemple 7.2 Le carreau à la pétanque. Un cas remarquable de collision est celui de deux objets de même masse dont un à l'arrêt et avec un coefficient de restitution très proche de un.

En prenant $e = 1$, l'équation 7.3 nous donne v_1:

$$v_1 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} u1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = 0$$

l'équation 7.4 donne:

$$v_2 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} u1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} u_1 = u_1$$

Ainsi le premier objet, celui qui arrive sur l'autre immobile, s'arrête net, et celui qui était immobile part avec la même vitesse que le premier. Dans la réalité, et donc dans la pétanque, le coefficient de restitution n'est pas tout à fait égal à un. La boule du "tireur" n'arrive pas horizontalement. Finalement sa trajectoire ne passe pas exactement par le centre de la boule à terre. On pourrait s'attendre à que les "carreaux" soient très rares et que l'on ne voie que des "palets". Heureusement il y a le frottement avec la terre qui a tendance à freiner les petites déviations latérales.

7.2 Collisions en deux et trois dimensions.

Le cas plus général, et plus courant des collisions est celui de collisions non-centrales (vous faites un palet à la place d'un carreau). Comme pour la pétanque, l'écart entre la trajectoire actuelle et la trajectoire qui donnerait une collision centrale, est imprévisible dans la plupart des phénomènes physiques. Cet écart est nommé **paramètre du choc**. Comme sa valeur est imprévisible, sa définition ne présente aucun intérêt([4]).

Examinons la collision entre un objet 1 de masse m_1 et un autre de masse m_2. Nous allons prendre le référentiel de l'objet 2. Ainsi, au départ, l'objet 1 se dirige à vitesse u_1 vers l'objet 2 à l'arrêt. Le fait de prendre le référentiel de l'objet 2 n'enlève pas de généralité au problème. Nous prendrons l'origine de coordonnées au point d'impact. L'axe horizontal sera celui des x et le vertical celui des y.

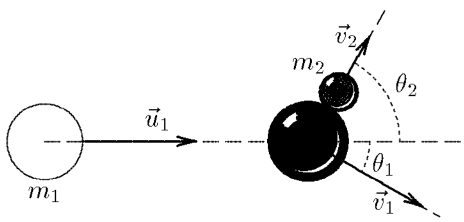


Figure 7.2 L'objet 1 percute l'objet 2 à l'arrêt. Dans ce choc non-central chaque objet part dans une direction différente.

Après le choc l'objet 2 part dans la direction donnée par l'angle θ_2 (voir figure) et l'objet 1 dans la direction donnée par θ_1. La conservation du moment linéaire nous donne, pour la direction x:

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$$

Dans le sens des y le moment linéaire est zéro:

$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2$$

Supposons que le choc soit élastique. Dans ce cas l'énergie cinétique est conservée:

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2$$

([4]) Dans certains cas il est intéressant de faire un choc non central à la pétanque ou au bowling. Par contre, au billard, le paramètre de choc est fondamental et s'appelle la "quantité de bille". On le règle en ajustant le point d'impact de la queue sur la première bille en ajustant l'"effet de côté" et la "hauteur d'attaque".

Nous nous retrouvons avec 3 équations et 4 variables: v_1, v_2, θ_1, et θ_2. Il nous manque quelque chose relié au paramètre du choc qui nous donnerait une relation supplémentaire. Il nous faudrait encore savoir comment relier le paramètre du choc aux vitesses et aux angles. Imaginez par exemple que les objets, au lieu d'être gentiment sphériques comme dans le dessin, soient ovoïdes, parallélépipédiques, ou aient la forme d'un ballon de rugby. Chaque cas demande une étude particulière (mais il ne le mérite peut-être pas!). En dehors des cas très particuliers, comme le billard, on ne s'intéresse pas au résultat d'un choc pour un paramètre de choc particulier. On s'intéresse plus souvent aux relations entre les angles ou les vitesses finales des particules. C'est le cas en physique nucléaire où on étudie les trajectoires des particules (parfois des centaines) produites par une réaction entre particules ou entre noyaux. On construit des dispositifs (parfois gigantesques) pour mesurer les angles et les vitesses des particules issues de la réaction. C'est à partir de ces études que l'on conclut qu'une certaine particule a été créée (et qu'elle a disparu quelques femtosecondes après).

Une illustration de ce que l'on peut faire quand on ne connaît pas le paramètre de choc ni son influence sur les angles est la suivante: traitons le cas d'un choc entre deux objets de masses égales. Calculons quel est l'angle θ_2 pour un angle θ_1 donné.

Nous commençons par ré-écrire les trois équations après avoir éliminé m et le $\frac{1}{2}$:

$$u_1 = v_1 \cos\theta_1 + v_2 \cos\theta_2 \tag{7.5}$$
$$v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2 \tag{7.6}$$
$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \tag{7.7}$$

On ré-écrit l'équation 7.5 sous la forme $u_1 - v_1\cos\theta_1 = v_2\cos\theta_2$, on l'élève au carré puis on lui additionne l'équation 7.6 élevée elle aussi au carré:

$$u_1^2 + v_1^2\cos\theta_1 - 2u_1v_1\cos\theta_1 = v_2^2\cos^2\theta_2$$
$$v_1^2\sin^2\theta_1 = v_2^2\sin^2\theta_2$$
$$u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1\cos\theta_1 = v_2^2 \tag{7.8}$$

On soustrait l'équation 7.7 de l'équation 7.8:

$$2v_1^2 - 2u_1v_1\cos\theta_1 = 0$$

La solution $v_1 = 0$ est une solution étrangère introduite par les élévations au carré. On la rejette. Il nous reste:

$$v_1 = u_1\cos\theta_1$$

On peut remplacer v_1 dans l'équation 7.7:

$$v_2^2 = u_1^2 - v_1^2 = u_1^2 - u_1^2\cos^2\theta_1 = u_1^2(1-\cos^2\theta_1) = u_1^2\sin^2\theta_1$$

soit:

$$v_2 = u_1\sin\theta_1$$

finalement, de l'équation 7.6 on tire $\sin\theta_2$ et on remplace v_1 et v_2 par les valeurs trouvées:

$$\sin\theta_2 = \frac{v_1}{v_2}\sin\theta_1 = \frac{v_1\sin\theta_1}{u_1\sin\theta_1} = \frac{v_1}{u_1} = \cos\theta_1$$

mais si $\sin\theta_2 = \cos\theta_1$ cela veut dire que θ_1 et θ_2 sont complémentaires, c'est-à-dire que $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. En conclusion dans un choc entre deux objets de même masse, dans le référentiel d'un d'entre eux (un des deux à l'arrêt) les objets partent à 90°.

Ce résultat est peut-être intéressant, mais remarquez que si nous avions observé la même collision dans le référentiel du centre de masses, nous aurions obtenu que les deux objets partent dans des directions opposées et avec la même vitesse, et ceci sans besoin d'écrire une seule équation.

7.3 Exercices.

1 - Pour être dans les normes, une balle de tennis lâchée d'une hauteur de 100 pouces sur une surface en béton doit rebondir à 55 pouces. Calculez le coefficient de restitution e. Lâchée d'un mètre d'hauteur, combien de temps rebondit-elle avant de s'arrêter?
R.N.: 0,74; 3,02 s.

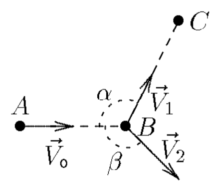
2 - Calculez le moment des objets suivants:
-une balle de calibre 45 de 12 grammes dont la vitesse est de $300\,m/s$.
-une balle de tennis de 58 grammes dont la vitesse est de $150\,km/h$
-un projectile de Flash-Ball de 28 grammes à $120\,m/s$.
-Le coup de poing d'un boxeur. Masse du poing + avant-bras: $\sim 3\,kg$ vitesse $\sim 13\,m/s$.
-un ballon de football de 425 grammes à $26\,m/s$.
Calculez la vitesse acquise par un homme de $70\,kg$ qui arrête chacun des objets (gilet pare-balles autorisé). Il est dit que le calibre 45 fut créé pour que la personne atteinte soit renversée en plus de blessée. Est-ce crédible?
R.N.: 3,6; 2,42; 3,36; 39; et $11\,kg\,m/s$. $v = 5\,cm/s$ pour le 45.

3 - La masse d'un ballon de basket-ball est de 595 grammes. Celle d'une balle de tennis est de 58 grammes. On réalise l'expérience suivante: on laisse tomber simultanément un ballon de basket et, au dessus une balle de tennis. La ballon de basket chute de 1 mètre avant de toucher le sol puis il rebondit. La balle de tennis rencontre, à la fin de sa chute de 1 mètre, le ballon de basket au début de sa course ascendante. On veut calculer la vitesse de la balle de tennis après sa collision avec le ballon de basket et la hauteur à laquelle elle monte. On supposera que les collisions sont élastiques.
Pour ceci calculez la vitesse du ballon de basket avant et après l'impact avec le sol. Calculez la vitesse de la balle de tennis à ce moment (juste avant la collision entre les balles). Calculez la vitesse du centre de masses des deux balles, puis la vitesse des deux balles dans le référentiel du centre de masses. Calculez la vitesse des deux balles dans le même référentiel après la collision. Re-transformez ces vitesses dans le référentiel du sol. Calculez la hauteur à laquelle monte la balle de tennis.
R.N.: $4{,}43\,m/s$; $V_{CM} = 3{,}64\,m/s$; $v_t = 11{,}71\,m/s$; $h = 7\,m$.

4 - Une voiture de masse $m_1 = 900\,kg$ roulant à $40\,km/h$ (suite à un freinage insuffisant) s'encastre dans un camion de masse $m_2 = 15000\,kg$ venant en face à une vitesse de $50\,km/h$ (freinage encore moins efficace). Calculez la vitesse (en km/h) de l'amas de ferraille. De combien a changé la vitesse (en km/h) de la voiture (et de ses occupants).
R.N.: $44{,}9\,km/h$; $84{,}9\,km/h$.

5 - Sachant que, dans un court de tennis, la hauteur du filet (au centre) est de $91{,}44\,cm$, calculez le temps minimum entre deux frappes successives d'un même joueur pendant un échange (non pour le service) et avec rebond à chaque échange. *Remarquez que la vitesse horizontale de la balle n'intervient pas.* Dans un premier temps faites le calcul comme si la balle était parfaitement élastique. Puis, examinez la situation avec un rebond partiellement élastique. Déterminez à quelle hauteur, après le rebond on doit jouer la balle pour que le temps soit minimum.
R.N.: $t = 1{,}73\,s$; $h \simeq 0$.

6 - La bille A est envoyée sur la bille B de sorte de caramboler la bille C. La vitesse $\vec{v}_1$ est de $2\,m/s$. L'angle est $\alpha = 116{,}56°$. Calculez les valeurs de V_1 et V_2 et l'angle β. Les trois billes ont la même masse. On ignorera les rotations, les effets et les frictions. La collision es supposée élastique.
R.N.: $V_1 = 0{,}8944\,m/s$; $V_2 = 1{,}789\,m/s$; $\beta = 153°$.



7 - On s'intéresse au choc frontal élastique entre une masse m_1 qui percute, à vitesse v_0, une autre masse m_2 à l'arrêt. On veut calculer le transfert d'énergie η de la masse 1 à la masse 2 en fonction du rapport de masses $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$. Si E_0 est l'énergie initiale de la masse 1, et E_1 son énergie après la collision, $\eta = 1 - \frac{E_1}{E_0}$. Vérifiez que la fonction η présente un maximum pour $\gamma = 1$. Combien vaut ce maximum?
R.: $\eta(1) = 1$.

8. ROTATION.

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés uniquement aux mouvements de translation. Un objet subit un mouvement de translation si, entre deux instants quelconques, toutes les particules qui forment l'objet se sont déplacées de la même distance.

Un objet subit un mouvement de rotation si chaque particule décrit un arc de cercle et que le centre de ces cercles se situe sur une même ligne droite et perpendiculaire aux cercles.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux mouvements de rotation des objets rigides. Ceci exclut les déformations et les vibrations. Aucun objet dans la réalité n'est parfaitement rigide, mais pour beaucoup de phénomènes physiques on peut négliger les déformations ou les étudier séparément.

Dans la plupart des cas, le mouvement d'un objet qui subit simultanément un mouvement de translation et un mouvement de rotation, peut être étudié en séparant les deux mouvements. On étudie d'un côté le mouvement de translation du centre de masses et de l'autre côté la rotation autour du centre de masses. C'est cela ce que nous allons faire.

8.1 Rotation avec accélération angulaire constante.

Nous avons déjà donné, au chapitre 2, les définitions de vitesse angulaire et accélération angulaire. On peut faire le parallèle avec les formules obtenues pour le mouvement uniformément accéléré en une dimension: θ correspond à x, ω à v et α à a. Les différentes équations correspondantes se trouvent sur la table de la figure 8.10.

Calculons les équations pour un mouvement de rotation avec accélération angulaire constante. Si l'angle de rotation est θ, la vitesse angulaire est:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

et l'accélération angulaire α est:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

On peut calculer la vitesse angulaire en fonction du temps:

$$\int_1^2 d\omega = \int_1^2 \alpha dt$$

où 1 correspond à la situation initiale ($\omega = \omega_\circ$ et $t = t_\circ$) et 2 correspond à la situation finale (ω et t). Comme α est constant:

$$\omega - \omega_\circ = \alpha(t - t_\circ)$$

soit:

$$\omega = \omega_\circ + \alpha(t - t_\circ)$$

On peut calculer aussi la position θ en fonction du temps. En remplaçant ω par $d\theta/dt$:

$$d\theta = (\omega_\circ + \alpha(t - t_\circ))\, dt$$

Si la position initiale est $\theta_\circ$:

$$\int_{\theta_\circ}^{\theta} d\theta = \int_{t_\circ}^{t} (\omega_\circ - \alpha t_\circ) dt + \int_{t_\circ}^{t} \alpha t\, dt$$

d'où:

$$\theta = \theta_\circ + (\omega_\circ - \alpha t_\circ)(t - t_\circ) + \tfrac{1}{2}\alpha(t^2 - t_\circ^2)$$

Si nous pouvons poser $t_\circ = 0$, l'équation devient plus agréable:

$$\theta = \theta_\circ + \omega_\circ t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

Finalement, de la définition d'accélération angulaire $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ nous pouvons écrire:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

d'où:

$$\alpha d\theta = \omega\, d\omega$$

En intégrant entre la situation 1 et la 2:

$$\tfrac{1}{2}\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}\omega_1^2 = \alpha(\theta_2 - \theta_1)$$

Les formules que nous venons de déduire ne sont qu'un traitement géométrique (et mathématique) de la rotation. Nous n'avons pas dit ce qu'il faut pour faire tourner un objet. Pour cela il faut revenir à la physique.

Il est peut-être utile de rappeler que l'on associe des vecteurs à la vitesse angulaire et à l'accélération angulaire. Les vecteurs sont ceux donnés par la "règle du tire-bouchon": quand vous tournez le volant à droite le vecteur vitesse angulaire de votre volant est dirigé ver l'avant et le bas, le long de la barre de direction. Pour l'accélération la direction est la même: si vous accélérez la rotation vers la droite le vecteur est vers le bas. Si vous décélérez la rotation vers la droite (vous arrêtez de tourner le volant à droite) le vecteur est vers vous.

8.2 Couple ou moment d'une force.

On n'a pas besoin d'être physicien pour savoir que pour faire tourner une roue il faut exercer une force. On sait aussi que c'est d'autant plus facile que la force exercée a un "bras de levier" important et qu'il vaut mieux exercer la force tangentiellement que radialement. Toute cette connaissance pratique correspond bien à la réalité. En physique, l'efficacité d'une force à faire tourner quelque chose s'appelle **couple** ou aussi **moment d'une force**([1]) par rapport à un point donné. Elle est est définie comme:

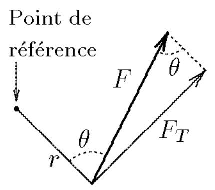


Figure 8.1 Le couple est le produit du rayon par la composante tangentielle de la force.

$$\tau = r\, F_T$$

où r est la distance entre le point d'application de la force et le point de référence et F_T est la composante tangentielle de la force. Le couple se mesure en $Newtons \cdot mètre$. Attention! c'est bien des $Newtons \cdot mètre$ mais ce ne sont surtout pas des *Joules*. Un couple n'est pas un travail (ni rien d'approché) même si les unités semblent être les mêmes.

Dans les cas où la force F n'est pas tangentielle le couple est:

$$\tau = r\, F \sin\theta$$

où θ est l'angle formé par le rayon r (voir figure 8.1) et la direction de la force.

([1]) Le nombre de définitions en physique qui utilisent le mot "moment" est remarquable . La racine du mot, en latin, veut dire "instant" mais aussi "impulsion". La diversité de concepts baptisés avec le mot "moment" est déroutante. En tout cas on peut dire que les physiciens ont fait preuve d'un manque total d'imagination.

Comme pour la vitesse et l'accélération angulaire, on attribue aussi un vecteur au couple. Pour ceci on commence par attribuer un vecteur au segment qui va du point de référence au point d'action de la force. Le vecteur couple $\vec{\tau}$ est le **produit vectoriel**(2) du vecteur r et la vecteur force F:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

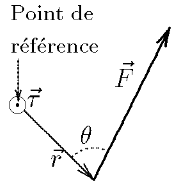


Figure 8.2 Le vecteur couple se situe à l'origine (symbole ⊙) et sort du papier.

Remarquez que la direction du vecteur couple est la même que celle du vecteur accélération et vitesse angulaire que le couple a tendance à créer. Évidemment ce n'est pas un hasard.

Dans beaucoup de cas il est plus pratique de remplacer le calcul du produit vectoriel par le calcul de la force par son bras. Dans la figure on peut constater que $|\vec{r}_b| = |\vec{r}| \sin\theta$. Comme le module du couple est $rF\sin\theta$, on voit que on peut l'obtenir directement en multipliant la force par son "bras" (le *bras de levier* dans la vie de tous les jours). Le bras de la force est la distance entre le centre et la droite qui contient la force.

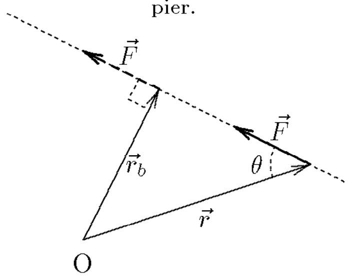


Figure 8.3 Le couple est égal à la force par le bras.

Évidemment ceci ne nous donne que le module du couple. On obtient la direction en utilisant la "*règle du tire-bouchon*" ou une autre similaire.

Mais cette définition ne nous permet pas de calculer l'accélération angulaire qu'un couple impose sur un objet. Pour cela nous allons passer par la conservation de l'énergie: le travail fait par la force du couple se transforme en énergie cinétique de rotation.

Produit vectoriel.

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ et $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ est un vecteur perpendiculaire au plan qui contient les deux vecteurs et dont le module est le produit des modules des deux vecteurs multiplié par le sinus de l'angle formé par les deux vecteurs. Ainsi, si les deux vecteurs sont dans le plan du papier, le produit vectoriel est perpendiculaire au papier. Pour la direction on peut utiliser plusieurs "règles". Celle que j'utilise est celle du "tire-bouchon": pour le produit $\vec{A} \times \vec{B}$ on fait tourner le vecteur $\vec{A}$ pour le rendre parallèle au vecteur $\vec{B}$ (avec les pointes dans la même direction). Si on tourne vers la droite le tire-bouchon s'enfonce. Si l'on tourne vers la gauche le tire-bouchon ressort.

Si l'on connaît les modules des vecteurs et l'angle qu'ils forment entre eux, on peut calculer le module du vecteur produit en multipliant les modules entre eux et par le sinus de l'angle qu'ils forment:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,\sin\theta$$

L'angle θ est mesuré de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$ par le chemin le plus court ($-\pi \leq \theta \leq \pi$). Le produit vectoriel n'est pas commutatif:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Si l'on connaît les composantes on peut calculer les composantes du produit:

$$(A_x, A_y, A_z) \times (B_x, B_y, B_z) = (A_y B_z - A_z B_y,\ A_z B_x - A_x B_z,\ A_x B_y - A_y B_x)$$

Le produit vectoriel est maximum si les deux vecteurs sont perpendiculaires et est zéro si les deux vecteurs sont parallèles.

(2) Pour le produit vectoriel, j'utilise la notation $\vec{A} \times \vec{B}$, que l'on trouve dans majorité des livres de physique, à la place de la notation franco-française $\vec{A} \wedge \vec{B}$ que l'on ne trouve que dans les livres français.

8.3 Énergie cinétique de rotation.

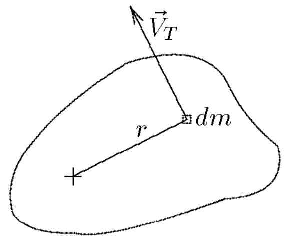


Figure 8.4 Le solide tourne autour du +.

L'énergie cinétique de rotation est la somme des énergies cinétiques dues à la vitesse tangentielle de chacune des particules du corps.

$$E_r = \sum \tfrac{1}{2} m_i V_{Ti}^2$$

Dans un corps rigide, chaque particule a une vitesse tangentielle différente, mais toutes ont la même vitesse angulaire. On peut remplacer V_{Ti}^2 par $r_i^2\,\omega^2$, où r_i est la distance de la particule à l'axe de rotation.

$$E_r = \sum \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2$$

En réalité, comme toute la masse de chaque m_i doit être située au même rayon, il faut prendre de toutes petites masses et transformer la somme en intégrale:

$$E_r = \tfrac{1}{2}\omega^2 \int_{vol} r^2 dm$$

ici *"vol"* indique qu'il faut étendre l'intégrale à tout le volume du solide. L'intégrale reçoit le nom de "moment d'inertie" (voir paragraphe suivant). On le représente souvent par la lettre I. Avec ceci l'énergie cinétique de rotation s'exprime:

$$E_r = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

ce qui fait un joli parallèle avec l'énergie cinétique de translation $\frac{1}{2}mv^2$.

8.4 Moment d'inertie.

Comme nous venons de l'écrire, le **moment d'inertie**(3) d'un solide autour d'un axe est:

$$\textbf{moment d'inertie} = I = \int_{vol} r^2 dm$$

où r est la distance du différentiel de masse à l'axe de rotation et le *"vol"* de l'intégrale veut dire qu'il faut intégrer sur tout le volume du solide.

Pour des masses ponctuelles (ou presque), au lieu d'une intégrale, nous aurons une somme:

$$\textbf{moment d'inertie} = I = \sum m_i r_i^2$$

où la somme s'étend à toutes les masses ponctuelles.

Exemple 8.1 Moment d'inertie d'un anneau.

Soit un anneau de rayon externe R_2, de rayon interne R_1, de largeur h et de densité (masse spécifique, etc.) ρ. Calculons son moment d'inertie autour de l'axe de symétrie cylindrique. Dans la figure de droite nous avons dessiné l'anneau avec l'axe de symétrie perpendiculaire au papier. Pour calculer l'intégrale il nous faut choisir un différentiel de masse dont toute la masse se trouve à la même distance de l'axe. Nous allons donc choisir un anneau d'épaisseur dr à une distance r de l'axe. Remarquez que, comme dr est infiniment petit, on satisfait à la condition que toute la masse de ce différentiel se trouve à la même distance de l'axe.

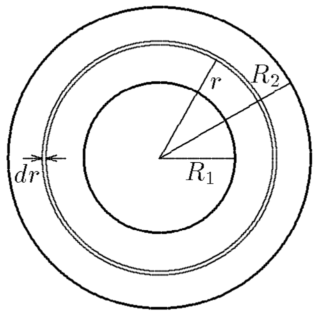


Figure 8.5 L'axe de rotation est au centre de l'anneau.

Maintenant il faut calculer la masse de cet anneau. Elle est égale à la densité multipliée par le volume. Or, le volume de quelque chose de mince est égal à la surface multipliée par l'épaisseur.

(3) Encore une chose qui s'appelle moment!

La surface de l'anneau est $2\pi r h$ (longueur par largeur). Le volume est $2\pi r\, h\, dr$. La masse sera: $dm = 2\pi\rho r\, h\, dr$. Le moment d'inertie sera donc:

$$I = \int_{vol} 2\pi\rho r\, h\, r^2\, dr$$

Pour que l'intégrale somme sur tout le volume il suffit que l'anneau mince que nous avons pris, prenne tous les rayons possibles entre R_1 et R_2:

$$I = 2\pi\rho\, h \int_{R_1}^{R_2} r^3\, dr = 2\pi\rho\, h \tfrac{1}{4}\left[r^4\right]_{R_1}^{R_2} = \tfrac{1}{2}\pi\rho\, h\left(R_2^4 - R_1^4\right) = \tfrac{1}{2}\pi\rho\, h\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

Comme la masse M de l'anneau est $M = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right) h\rho$, le moment d'inertie est finalement:

$$I_{anneau} = \tfrac{1}{2} M\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

Remarquez que le moment d'inertie ne dépend pas de la largeur de l'anneau. Il peut sembler surprenant, à première vue, que dans les parenthèses on trouve un signe plus. On pourrait penser que le moment d'inertie d'un anneau creux est plus grand que celui d'un disque. En fait c'est vrai *pour une même masse*. En effet, si pour une même masse totale vous envoyez la masse vers l'extérieur le moment d'inertie augmente.

On déduit immédiatement que le moment d'inertie d'un disque ou d'un cylindre est:

$$I_{disque} = \tfrac{1}{2} M R^2$$

Exemple 8.2 Moment d'inertie d'une sphère pleine.

Nous allons calculer le moment d'inertie d'une sphère pleine de rayon R et de densité ρ autour d'un diamètre. Pour cela nous allons diviser la sphère en un nombre infini de disques perpendiculaires à l'axe de rotation (axe des x). Pour un angle θ (voir dessin), la position du disque en x est:

$$x = R\cos\theta$$

et l'épaisseur du disque correspondant à une petite variation $d\theta$ de l'angle est:

$$dx = \frac{d}{d\theta} R\cos\theta = -R\sin\theta\, d\theta$$

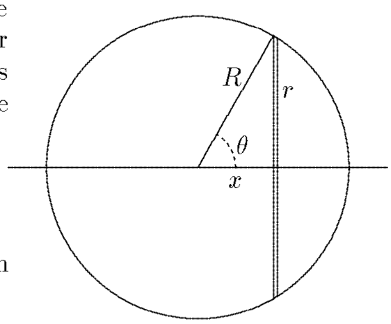


Figure 8.6 L'axe de rotation (l'axe des x) est le diamètre de la sphère .

Le rayon du disque est $r = R\sin\theta$. La (petite) masse du disque est (densité par surface par épaisseur):

$$dM = \rho\pi r^2 dx$$

Le moment d'inertie de chacun des disques est $dI = \frac{1}{2} r^2 dM$. Le moment d'inertie total sera la somme de tous les moments d'inertie:

$$I = \int \tfrac{1}{2} r^2 dM = \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} R^2 \sin^2\theta \rho\pi R^2 \sin^2\theta(-R\sin\theta\, d\theta) = -\tfrac{1}{2}\rho\pi R^5 \int_0^{\pi} \sin^5\theta\, d\theta$$

On peut calculer séparément l'intégrale de $\sin^5$:

$$\int_0^{\pi} \sin^5\theta d\theta = \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)^2 \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} (1+\cos^4\theta - 2\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$\left[-\cos\theta - \tfrac{1}{5}\cos^5\theta + \tfrac{2}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} = -2 - \tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{3} = -\tfrac{16}{15}$$

Ce qui nous donne:

$$I = \tfrac{8}{15}\rho\pi R^5$$

Comme la masse de la sphère est $\rho \frac{4}{3} \pi R^3$, nous obtenons:

$$I_{sph\grave{e}re} = \tfrac{2}{5} M\, R^2$$

Je laisse au lecteur le soin de calculer le moment d'inertie d'un parallélépipède autour de son centre de masses.

Comme vous avez pu le constater, dans les exemples que nous venons de faire, nous avons calculé les moments d'inertie par rapport à des axes qui passaient par le centre de masses. Nous allons maintenant calculer le moment d'inertie par rapport à n'importe quel autre axe parallèle à un axe qui passe par le centre de masses et pour lequel on connaît le moment d'inertie.

On connaît le moment d'inertie pour l'axe qui passe par le centre de masses (point 0 dans le dessin). On veut calculer le moment d'inertie pour un autre axe parallèle qui passe par le point 1, situé à une distance d. Par définition le nouveau moment d'inertie I_1 est:

$$I_1 = \sum m_i r_{1i}^2$$

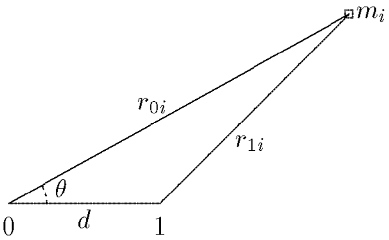


Figure 8.7 Connaissant le moment d'inertie pour l'axe qui passe par 0 (centre de masses) on calcule le moment d'inertie pour l'axe qui passe par 1.

où les r_{1i} sont les distances de chaque masse au point 1. Le **théorème du cosinus** ou **théorème de Pythagore généralisé** nous dit que:

$$r_{1i}^2 = r_{0i}^2 + d^2 - 2dr_{0i}\cos\theta$$

si nous remplaçons:

$$I_1 = \sum m_i(r_{0i}^2 + d^2 - 2dr_{0i}\cos\theta) = \sum m_i r_{0i}^2 + d^2 \sum m_i - 2d \sum m_i r_{0i}\cos\theta$$

Le premier terme de la somme est simplement le moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe par le centre de masses. Le dernier terme est nul car $r_{0i}\cos\theta$ n'est autre chose que la coordonnée en x de la masse m_i mesurée par rapport au point 0 (le centre de masses). Finalement:

$$I_1 = I_0 + Md^2$$

Une conséquence immédiate de cette égalité est que, comme le terme Md^2 est toujours positif ou nul, le moment d'inertie par rapport à un axe qui passe par le centre de masses est plus petit que par rapport à n'importe quel autre axe parallèle.

8.5 Couple et accélération angulaire.

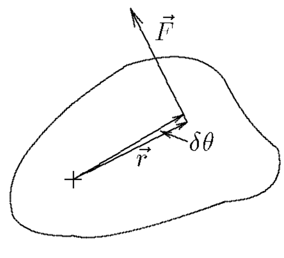


Figure 8.8 Quand l'objet tourne de $\delta\theta$, la force effectue un travail $\tau\,\delta\theta$.

Maintenant nous avons tout ce qu'il faut pour calculer l'accélération angulaire d'un objet soumis à un couple. Nous avons un objet qui peut tourner autour d'un axe. Le moment d'inertie de l'objet autour de cet axe est I. Il tourne à vitesse angulaire ω. On applique une force F à une distance r de l'axe de rotation. Pendant un court intervalle de temps l'objet va tourner d'un angle $\delta\theta$ en subissant une accélérations angulaire α du fait du couple que nous appliquons. La force appliquée va effectuer un travail qui vaut $r\,d\theta F\sin\phi$ où ϕ est l'angle que forme la force avec le rayon. Mais $rF\sin\phi$ est simplement le couple τ. Le travail effectué par la force est donc:

$$\delta T = \tau\,\delta\theta$$

Ce travail doit se convertir en augmentation de l'énergie cinétique de rotation du corps:

$$\delta T = \tau\,\delta\theta = \tfrac{1}{2} I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Mais nous avions déjà calculé que dans un mouvement de rotation uniformément accéléré:

$$\tfrac{1}{2}\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}\omega_1^2 = \alpha(\theta_2 - \theta_1)$$

où α est l'accélération angulaire (que nous cherchons). Dans notre cas $\theta_2 - \theta_1 = \delta\theta$:

$$\tau\,\delta\theta = I\alpha\,\delta\theta$$

donc:

$$\tau = I\alpha$$

Cette formule est à comparer avec $F = ma$ du mouvement linéaire.

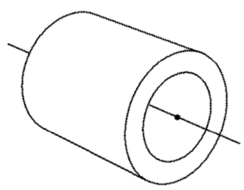
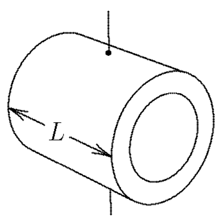
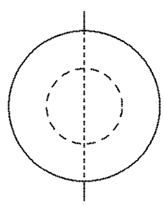
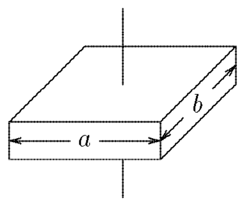
Cylindre creux/plein Disque Anneau autour de l'axe du cylindre  $I = \frac{M}{2}(R_{ext}^2 + R_{int}^2)$	Cylindre creux/plein Disque Anneau autour du diamètre central  $I = \frac{M}{4}(R_{ext}^2 + R_{int}^2) + \frac{M\,L^2}{12}$
Sphère creusse/pleine autour d'un diamètre  $I = \frac{2}{5} M \frac{R_{ext}^5 - R_{int}^5}{R_{ext}^3 - R_{int}^3}$	Parallélépipède droit autour d'un axe normal passant par le centre de masses  $I = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$

Figure 8.9 Moments d'inertie de quelques solides. Pour les cylindres et les sphères pleins, R_{int} est égal à zéro. Pour des axes qui ne passent pas par le centre de masses mais qui sont parallèles à ceux de la figure on peut calculer le moment d'inertie en utilisant la formule $I_1 = I_0 + Md^2$ démontrée plus haut.

Correspondance entre mouvements linéaires et rotationnels		
	Linéaire	Rotationnel
Position	x	θ
Vitesse	v	ω
Accélération	a	α
Vitesse	$v = v_o + at$	$\omega = \omega_o + \alpha t$
Déplacement	$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
Vitesse	$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_o^2 + \alpha(x - x_o)$	$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_o^2 + \alpha(\theta - \theta_o)$
Masse	m	Moment d'inertie $I = \sum m_i r_i^2$
Énergie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
Force	$\vec{F}$	Couple=$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Accélération	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
Moment	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$

Figure 8.10 Correspondance entre diverses grandeurs de mouvements linéaire et rotationnel.

Exemple 8.3 CD-ROM La masse d'un CD-ROM est de 14,8 g. Le diamètre externe est 12 cm et le diamètre du trou central est 1,5 cm. Son moment d'inertie est:

$$I = \frac{1}{2}M\left(R_2^2 + R_1^2\right) = \frac{1}{2}14{,}8\,10^{-3}\left(\left(6\,10^{-2}\right)^2 + \left(0{,}75\,10^{-2}\right)^2\right) = 2{,}71\,10^{-5} kg\, m^2$$

Quand il tourne à 3600 tours/minute, son énergie cinétique rotationnelle est:

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}2{,}71\,10^{-5}\left(2\pi 60\right)^2 = 1{,}92 J$$

Si on utilisait cette énergie pour le faire monter en hauteur, on aurait:

$$mgh = 1{,}92$$
$$h = \frac{1{,}92}{14{,}8\,10^{-3} 9{,}81} = 13{,}24\, m$$

Exemple 8.4 Boule qui roule. Une boule de masse M est lâchée à l'arrêt en haut d'un plan inclinée, d'une hauteur h. Si l'on suppose que la boule roule sans friction, quelle sera sa vitesse en bas du plan incliné?

L'astuce de ce problème est que quand une boule roule, elle a les deux types d'énergie cinétique: linéaire et rotationnelle. Mais elles sont reliées car si elle tourne, à chaque tour elle avance d'une distance $2\pi R$. Vue du référentiel du centre de masses la vitesse tangentielle de la surface de la boule est $V_T = \omega R$. Mais comme la vitesse du bas de la boule est zéro (elle est en contact avec le sol), la vitesse du centre de masses, vue du sol, est V_T. L'énergie totale sera:

$$E = E_c + E_r = \frac{1}{2}MV_T^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV_T^2 + \frac{1}{2}I\frac{V_T^2}{R^2}$$

Le moment d'inertie I d'une boule est: $\frac{2}{5}MR^2$:

$$E = \frac{1}{2}(M + \frac{2}{5}M)V_T^2 = \frac{7}{10}MV_T^2$$

Si cette vitesse provient d'une descente d'une hauteur h:

$$Mgh = \frac{7}{10}MV_T^2$$

et

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

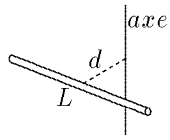
Si la boule ne roulait pas, elle serait arrivée avec une vitesse $\sqrt{2gh}$, supérieure à la précédente, car il n'y aurait pas eu d'énergie utilisée à faire tourner la boule.

8.6 Exercices.

1 - Retrouvez la formule du moment d'inertie d'un parallélépipède droit autour du centre de masses (figure 8.9 du fascicule): $I = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$. Où a et b sont les deux dimensions perpendiculaires à l'axe de rotation et M est sa masse.

2 - À partir du résultat de la question précédente, trouvez la formule du moment d'inertie d'une tige extrêmement fine de masse m et longueur L, autour du centre de masses (à $L/2$ de l'extrémité). Une tige est extrêmement fine si les dimensions perpendiculaires à la longueur sont négligeables devant celle-ci.
R.: $\frac{mL^2}{12}$.

3 - Utilisez le résultat de l'exercice 2 pour calculer le moment d'inertie d'une fine tige de longueur L et masse m autour d'un axe perpendiculaire à la tige mais qui passe par un point situé à distance d du centre de la tige. Les droites qui contiennent la tige, la distance d et l'axe de rotation sont perpendiculaires entre elles.
R.: $I = m\left(\frac{L^2}{12} + d^2\right)$.



4 - Utilisez le résultat précédent pour calculer le moment d'inertie:

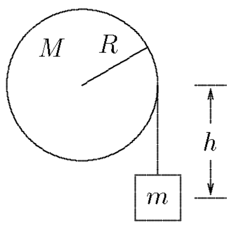
a- d'un cylindre creux infiniment mince (rayon R, longueur L, masse m) autour d'un axe perpendiculaire à l'axe du cylindre et qui passe par son centre de masses.

b- d'un cylindre creux (rayons R_1 et R_2, longueur L, masse m) autour d'un axe perpendiculaire à l'axe du cylindre et qui passe par son centre de masses.
R.: a:$\frac{m}{2}R^2 + \frac{m}{12}L^2$; b:$\frac{m}{4}\left(R_2^2 + R_1^2\right) + \frac{mL^2}{12}$.

5 - Utilisez le résultat de l'exercice 2 pour calculer le moment d'inertie d'une fine tige de longueur L et masse m autour d'un axe perpendiculaire à la tige mais qui passe par son extrémité.
R.: $\frac{mL^2}{3}$.

6 - Une fine tige de longueur L et masse m est appuyée verticalement sur une extrémité. Comme elle est instable elle commence à basculer. On admet que l'extrémité basse ne glisse pas sur le support. Calculez la diminution d'énergie potentielle quand la tige s'est inclinée d'un angle θ par rapport à la verticale. Cette diminution d'énergie potentielle s'est transformée en énergie de rotation de la tige. Calculez la vitesse angulaire de celle-ci.
Calculez la vitesse **linéaire** de l'extrémité supérieure de la tige quand la tige atteint l'horizontale. Comparez cette vitesse à celle d'un corps qui serait tombé de la même hauteur L que la longueur de la tige. Que se passe-t-il si, à la place d'une tige rigide, on a à faire à un long empilement de briques (non collées)?
R.: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)}$; $\sqrt{3gL}$.

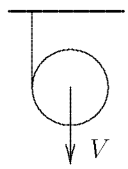
7 - Une masse m est accrochée à une ficelle enroulée autour d'un cylindre plein de masse M et de rayon R. Au temps $t = 0$ on libère le cylindre. Calculez la position et la vitesse de la masse m en fonction du temps, ainsi que l'angle tourné et la vitesse angulaire du cylindre.
R.: $a = g\frac{m}{m+\frac{1}{2}M}$; $\alpha = a/R$; $v = at$; $h = h_o + \frac{1}{2}at^2$; $\omega = \alpha t$; $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$.



8 - Une boule de bowling est lancée sur la piste à vitesse V_o. Au moment de la pose elle ne tourne pas mais glisse sur le parquet. Les forces de friction créent un couple qui crée une accélération angulaire qui fait que la boule se met à tourner de plus en plus vite. Ces mêmes forces de friction créent une accélération linéaire négative et la boule ralentit. Ceci dure jusqu'à ce que la vitesse de rotation et la vitesse de translation fassent que la surface de la boule ne glisse plus sur le parquet. La boule continue à rouler sans friction à vitesse

(presque) constante. Démontrez que cette vitesse est $\frac{5}{7}V_o$. Elle ne dépend ni de g ni du coefficient de friction μ.
Démarche: Calculez la force de friction en supposant μ connu. Avec cette force calculez l'accélération linéaire et la vitesse V en fonction du temps. Avec cette même force calculez le couple, l'accélération angulaire puis la vitesse angulaire ω en fonction du temps. Le glissement s'arrête quand la vitesse de translation du point bas de la boule est zéro (la vitesse du parquet!). Déduisez le temps pour que la condition soit satisfaite et, avec ce temps, calculez la vitesse.

9 - Un cylindre plein de masse $M = 1{,}2\,kg$ et rayon $R = 5\,cm$ est attaché au plafond par une ficelle enroulée autour de lui. On lâche le cylindre au temps $t = 0$. Calculez les accélérations linéaires et angulaires du cylindre ainsi que sa position en fonction du temps. Quelle sera sa vitesse angulaire après une chute d'un mètre? *On admettra que la ficelle est assez longue pour la considérer comme verticale.*
R.N.: $a = \frac{2}{3}g$; $\alpha = 130{,}8\,r/s^2$; $\omega = 11{,}5\,T/s$.



9. CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE OU MOMENT ANGULAIRE.

La conservation du moment cinétique (ou moment angulaire) joue le même rôle pour le mouvement de rotation que la conservation de la quantité de mouvement (ou moment linéaire) pour le mouvement linéaire. Elle constitue une part aussi importante dans la description des systèmes microscopiques (atomes, noyaux) que dans des systèmes astronomiques.

9.1 Moment cinétique d'une particule.([1])

Dans les livres de physique américains le moment cinétique est appelé **"moment angulaire"**.

Soit une particule de masse m et moment linéaire $\vec{p} = m\vec{v}$. À l'instant considéré, la particule se trouve à l'extrémité d'un vecteur $\vec{r}$ par rapport au point fixe d'origine O.

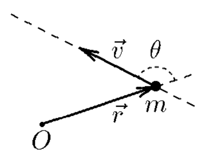


Figure 9.1 Le moment cinétique de la particule est le produit de son moment linéaire $m\vec{v}$ par le vecteur $\vec{r}$.

Le **moment cinétique** de la particule par rapport au point O est:

$$\textbf{moment cinétique} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Le module du moment cinétique est donc $L = rp\sin\theta$ où θ est l'angle formé entre $\vec{r}$ et $\vec{p}$. La direction de $\vec{L}$ est perpendiculaire au plan qui contient les deux vecteurs (voir l'encadré sur le produit vectoriel à la page 8.3). Nous allons déduire la plus importante relation entre le couple et le moment cinétique.

Dérivons l'expression de la définition du moment cinétique:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

La dérivée d'un produit de vecteurs se traite de la même façon que la dérivée de n'importe quel autre produit, en faisant attention à ne pas changer l'ordre des facteurs:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Mais $d\vec{r}$ est simplement le vecteur déplacement pendant le temps dt. Donc $\frac{d\vec{r}}{dt}$ n'est pas autre chose que la vitesse $\vec{v}$. Comme $\vec{p} = m\vec{v}$, la première parenthèse donne:

$$\vec{v} \times m\vec{v}$$

c'est-à-dire, le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles. Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles étant zéro, il nous reste:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}m\vec{v} = \vec{r} \times (m\vec{a})$$

([1]) Encore un concept qui porte le nom de "moment"! Les américains appellent ce moment **"moment angulaire"**. Dans les livres français le nom est **"moment cinétique"**. Je ne trouve pas le nom américain très réussi, mais le nom français me parait complètement raté. Dans "cinétique" il n'y a rien qui rappelle que tout se passe par rapport à un point donné. On pourrait le confondre facilement avec le moment linéaire. Malheureusement c'est avec le nom de "cinétique" qu'il risque de figurer dans les questions des concours.

le dernier facteur $m\vec{a}$ est la masse par l'accélération, c'est-à-dire, la force qui agit sur la particule:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Le produit vectoriel de $\vec{r}$ par la force est le couple produit par la force. Ceci est le résultat que nous cherchions: "la dérivée temporelle du moment cinétique est égale au couple exercé sur la particule".

Exemple 9.1 Moment cinétique (angulaire) d'une particule.

Soit une particule de masse m et moment linéaire $\vec{p} = m\vec{v}$. À l'instant considéré, la particule se trouve à l'extrémité d'un vecteur $\vec{r}$ par rapport au point fixe d'origine O. En appliquant la définition, le moment cinétique de la particule par rapport au point O est:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

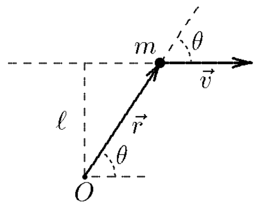


Figure 9.2 Le module du moment cinétique de la particule est le produit de son moment linéaire mv par la distance d.

Le module du moment cinétique est donc $L = rp\sin\theta$ où θ est l'angle formé entre $\vec{r}$ et $\vec{p}$. La direction de $\vec{L}$ est perpendiculaire au plan qui contient les deux vecteurs. Dans la figure 9.2 vous constaterez que $r\sin\theta = \ell$. Le module du moment angulaire de la particule est le produit du moment linéaire (ou quantité de mouvement) $p = mv$ multiplié par la distance ℓ entre la trajectoire de la particule et le point de référence.

$$L = mv\ell$$

Si nous accélérons la particule en lui appliquant une force F parallèle à sa vitesse, son accélération sera: $a = \frac{F}{m}$. La variation du module du moment cinétique sera:

$$\frac{dL}{dt} = m\ell\frac{dv}{dt} = \ell ma = \ell m\frac{F}{m} = F\ell = \tau$$

où τ est le couple de la force d'accélération par rapport au point de référence. Remarquez que comme la particule suit une trajectoire droite, la distance ℓ reste constante.

9.2 Moment cinétique d'un ensemble de particules.

Le moment cinétique d'un ensemble de particules est la somme des moments cinétiques de chaque particule:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

La variation du moment cinétique sera:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{\tau}_i \tag{9.1}$$

Le terme de droite est la somme de tous les couples produits par toutes les forces agissant sur les particules. Parmi ces forces il peut y avoir des forces externes et des forces internes (les forces internes sont celles exercées par une particule de l'ensemble sur une autre particule de l'ensemble). Mais la troisième loi de Newton nous dit que les forces et leurs réactions sont égales et de signe opposé, et qu'elles agissent sur la même droite. Comme elles sont situées sur la même droite, leurs couples par rapport à n'importe quel point sont égaux et de signe opposé. Donc, les seuls couples qui peuvent ne pas se compenser dans la somme, sont les couples externes (ceux produits par des forces externes):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\tau}_{ext.}$$

Donc, la variation temporelle du moment cinétique d'un ensemble de particules par rapport à un point fixe est égale à la somme des couples externes.

Dans le cas où les particules forment un corps rigide, nous avons vu que le couple externe est égal au moment d'inertie multiplié par l'accélération angulaire:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Donc:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

en intégrant:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{9.2}$$

(la constante d'intégration est nulle car pour une vitesse angulaire nulle, les vitesse des particules et leurs moments cinétiques sont aussi nuls: pour $\vec{\omega} = 0$ on sait que $\vec{L} = 0$).

On peut faire le parallèle entre cette formule et la définition du moment linéaire ou quantité de mouvement: $\vec{p} = m\vec{v}$. Le moment d'inertie correspond à la masse, la vitesse angulaire à la vitesse linéaire et le moment cinétique au moment linéaire.

Si on introduit l'équation (9.2) dans la (9.1) nous obtenons:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}I\vec{\omega} \tag{9.3}$$

Si le moment d'inertie est constant, comme c'est la cas pour un corps rigide, cette équation nous donne à nouveau:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

qui est l'équation correspondante à $\vec{F} = m\vec{a}$. Par contre, si ce n'est pas un corps rigide ou s'il s'agit d'un ensemble de corps ou de particules, l'équation 9.3 reste tout de même valable. Seulement, cette fois, aussi bien le moment d'inertie I que la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ peuvent varier dans le temps

9.3 Conservation du moment cinétique.

Quand les couples externes sont zéro $\vec{\tau} = 0$, l'équation (9.3) nous donne:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Ce qui implique que $\vec{L} =$ constant. Remarquez que comme $\vec{L}$ est un vecteur, L reste constant en magnitude et direction.

Prenons un corps qui peut changer de forme. Sous une certaine configuration son moment d'inertie est I_1 et sa vitesse angulaire est $\vec{\omega}_1$. Si le corps change de forme (sans intervention d'un couple extérieur) et que la nouvelle distribution des masses fait que son nouveau moment d'inertie est I_2 il changera sa vitesse angulaire de sorte que:

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$$

Comme le moment d'inertie est un scalaire, la direction du vecteur vitesse angulaire restera constante mais la valeur de la vitesse angulaire aura changé.

Par exemple une patineuse([2]) qui fait une pirouette. Elle commence par se donner un moment cinétique en créant un couple avec un patin alors qu'elle pivote sur la pointe de l'autre.

([2]) Je prends une patineuse car les forces de friction avec la glace sont plus faibles que celles des chaussons d'une ballerine avec le parquet.

Elle le fait avec les bras ouverts ce qui lui donne un moment d'inertie important autour d'un axe vertical. Tout en gardant son équilibre, elle serre les bras près du corps ce qui lui fait diminuer son moment d'inertie. La conservation du moment cinétique lui fait augmenter sa vitesse angulaire. Quand elle veut arrêter sa pirouette, elle ouvre ses bras et peut-être même la jambe libre. Ceci lui fait augmenter son moment d'inertie et diminuer sa vitesse de rotation. Il ne lui reste qu'à appuyer le patin libre pour créer un couple qui réduira son moment cinétique.

Dans d'autres sports qui comprennent des tours, vrilles, pirouettes, etc, comme le trampoline, plongeon, gymnastique, etc., la sportive utilise des méthodes de modification de sa vitesse angulaire en modifiant sa position de sorte d'augmenter ou diminuer son moment d'inertie. Par exemple en plongeon de haut vol, l'athlète quitte la plateforme, le corps tendu, avec une faible vitesse angulaire horizontale (elle tourne vers l'avant ou vers l'arrière) puis, une fois en l'air, elle diminue son moment d'inertie horizontal en se mettant en position "groupé" (jambes repliées sur la poitrine et enserrées avec les bras), sa vitesse angulaire augmente et elle tourne sur elle même. Vers la fin de son saut elle déplie le corps et sa vitesse angulaire redevient celle qu'elle avait en quittant la plateforme. On a l'impression qu'elle rentre dans l'eau sans tourner.

Un autre exemple vous montre que tout le monde est au courant de la conservation du moment cinétique. Imaginez que vous êtes debout et habillé sur le bord d'une piscine en lui tournant le dos. Quelqu'un vous pousse en arrière et vous êtes sur le point de tomber. Que faites vous pour essayer de vous rattraper? Vous faites des moulinets avec vos bras en les faisant tourner très vite vers l'arrière. Vos bras qui tournent vers l'arrière ont un vecteur moment cinétique dirigé horizontalement vers votre droite. La conservation du moment cinétique exige que le reste de votre corps ait un vecteur moment cinétique dirigé horizontalement vers votre gauche ce qui correspond à votre corps pivotant sur vos pieds vers l'avant (et vers le sec). Si vous réussissez à donner à votre corps un moment cinétique plus grand que celui qui vous envoyait vers l'arrière, vous resterez au sec. Cette réaction est intuitive et tout le monde le fait sans réfléchir. Si on vous pousse vers l'avant vous tournerez vos bras vers l'avant.

Les chats sont particulièrement doués pour utiliser la conservation du moment cinétique. Ils tournent leurs pattes et leur corps de sorte de retomber sur leurs pattes.

Une autre utilisation de la conservation du moment cinétique est le contrôle d'attitude([3]) des satellites artificiels. Presque tous les satellites ont besoin d'être orientés précisément (directions des antennes, caméras, etc.). L'observatoire orbital Hubble doit être orienté avec une précision supérieure à 1/10 de seconde d'arc (ce n'est pas la peine d'avoir un bon télescope si la photo est "bougée"). On crée du couple avec des fusées d'appoint qui tirent sur le côté. Cela permet d'orienter le satellite, mais ces fusées ne sont pas très précises. De plus, les fusées d'appoint consomment du carburant, qui est une denrée précieuse et limitée dans un satellite. Pour enlever le moment cinétique résiduel on fait tourner un disque (volant d'inertie), avec un moteur électrique, dans le sens où le satellite tourne, jusqu'à ce que le disque ait un moment cinétique égal a celui que l'on veut "supprimer". En réalité on ne l'a pas supprimé, il est bien conservé, mais maintenant il n'y a que le disque qui tourne.

On utilise aussi la méthode du volant d'inertie pour modifier l'orientation du satellite: si vous voulez que le satellite regarde plus à gauche, vous faites tourner un volant d'inertie à droite. La conservation du moment cinétique fait que le reste du satellite se met à tourner à gauche. Quand le satellite est arrivé à la position désirée, on arrête le volant ce qui arrête la rotation du satellite

La conservation du moment cinétique a des conséquences aussi en astronomie. Par exemple quand, vers la fin de leur vie, certaines étoiles se transforment en étoiles neutroniques, toute leur masse se concentre dans une petite sphère de quelques kilomètres de diamètre et d'une densité de l'ordre de celle des noyaux atomiques. Leur moment d'inertie diminue énormément, et leur vitesse angulaire augmente d'autant. On a observé des pulsars dont la période n'est que de quelques millisecondes.

À cause des marées, la lune exerce un couple sur la terre. Celui-ci diminue le moment cinétique de la terre qui, en conséquence, augmente celui de la lune. Dans le cas d'un satellite, quand ont lui augmente son énergie, comme ici à la lune, sa vitesse angulaire diminue, le rayon de

([3]) Attitude: en général: position. Dans le cas des satellites, orientation de celui-ci par rapport à la terre, les étoiles, etc.

son orbite augmente et sa période augmente. La lune s'éloigne de la terre, le mois lunaire s'allonge et le jour s'allonge. Réciproquement, il y a très longtemps, la lune était plus proche, les marées plus fortes et les mois et les jours plus courts.

9.4 Le gyroscope, la toupie et le vélo.

9.4.1 Le gyroscope.

Le gyroscope est, en principe, un disque ou un cylindre qui tourne sur un axe, comme celui dessiné sur la figure. Imaginons que l'axe est fixe et que le disque peut tourner sur l'axe sans friction, grâce à des roulements à billes.

Imaginez que le gyroscope tourne dans le sens indiqué dans la figure et que vous le tenez par l'axe avec la main gauche au fond et la main droite sur la partie proche de l'axe. Si maintenant vous essayez de tourner le gyroscope vers la droite, en descendant votre main droite et en montant la gauche, vous sentirez une sensation très surprenante car le gyroscope va pousser votre main droite vers vous est votre main gauche vers l'avant.

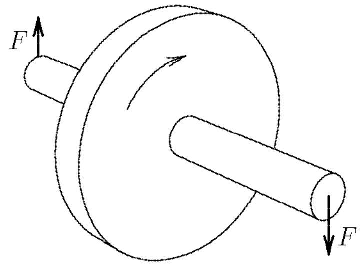


Figure 9.3 Quand vous poussez le côté droit vers le bas, au lieu de descendre il pousse vers vous .

Vous exercez un couple qui aurait fait tourner n'importe quel autre objet autour d'un axe horizontal. Le gyroscope réagit en tournant sur un axe vertical.

De plus, si vous le lâchez à droite en lui laissant la liberté de tourner sur l'axe de gauche, le gyroscope, au lieu de tomber à droite comme le ferait un objet "normal", va se mettre à tourner autour du support de l'axe gauche, en gardant l'axe toujours horizontal. Cette rotation de la direction de rotation du gyroscope s'appelle **précession**.

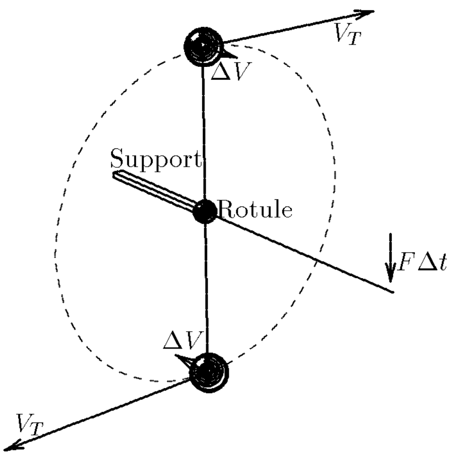


Figure 9.4 Quand on donne un petit coup sur l'extrémité de la barre horizontale on communique aux masses une vitesse horizontale perpendiculaire à leur vitesse tangentielle.

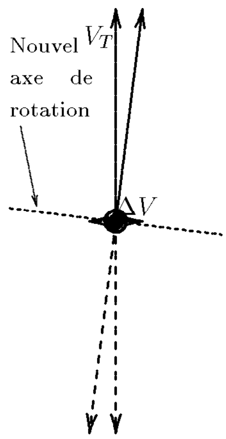


Figure 9.5 Vue d'en haut du dessin de gauche. Les vitesses de la masse d'en haut sont en continu et celles de la masse d'en bas sont en pointillés.

Pour comprendre la raison de base de ce comportement vraiment étrange, nous allons imaginer un dispositif simplifié. Au lieu d'avoir un disque ou un cylindre nous allons nous restreindre à deux masses ponctuelles. Ces deux masses sont reliées par une barre rigide de masse négligeable. Du centre de cette barre part une autre perpendiculaire. L'ensemble est tenu à la liaison des deux barres par une rotule([4]) fixée à un support rigide.

([4]) En mécanique, une rotule est un axe solidaire d'une sphère, laquelle se trouve à l'intérieur d'un morceau de sphère creuse. Le morceau de sphère creuse fait un peu plus qu'une demi sphère ce qui fait que la bille est fixe tout en pouvant tourner totalement ou partiellement autour de n'importe quel axe.

Au départ les masses tournent autour d'un axe horizontal qui coïncide avec la barre horizontale (voir figure 9.4). Juste au moment où une des masses passe en haut, on donne un petit coup (une impulsion) sur la barre horizontale. Comme la barre est rigide, ce coup se transmet aux masses et leur communique une petite vitesse ΔV horizontale. Cette vitesse est dirigée vers la droite pour la masse d'en haut et vers la gauche pour la masse d'en bas. Maintenant la nouvelle vitesse des masses sera l'addition de la vitesse précédente avec celle, perpendiculaire, que nous venons de lui communiquer.

Dans la figure 9.5 nous avons dessiné les vitesses des masses vues d'en haut. Celle de la masse d'en haut sont en trait continu et celles de la masse d'en bas sont en pointillés. Le résultat de l'addition de vitesses est que la vitesse de la masse d'en haut est maintenant dirigée un peu vers la droite, et que la vitesse de la masse d'en bas est dirigée un peu vers la gauche.

Maintenant les masses vont tourner sur un plan qui contient les nouvelles vitesses. Ce plan est un peut tourné vers la droite par rapport au plan de rotation précédent. Le nouvel axe de rotation aura tourné aussi horizontalement vers la droite. Nous retrouvons ainsi le comportement surprenant du gyroscope: nous lui avion donné un coup pour que l'axe de rotation s'incline vers le bas et ce que nous obtenons est une rotation verticale vers l'arrière.

Dans le cas d'un gyroscope, au lieu d'avoir deux masses, nous en avons une infinitude. L'addition des vitesses est un peu plus compliquée car cette fois les vitesses des différentes masses ont des composantes verticales. Néanmoins, pour toutes les masses de la moitié supérieure, la composante horizontale de la vitesse tangentielle est dirigée vers le fond (comme dans la figure 9.5) et pour ces même masses la vitesse ajoutée est dirigée vers la droite. Donc, toutes le particules de la moitié supérieure ont leur vitesse déviée vers la droite. Par le même raisonnement on déduit que toutes les particules de la moitié inférieure ont leur vitesse déviée vers la gauche (à nouveau comme dans la figure 9.5). Le résultat est que le gyroscope se comporte de la même manière que notre objet avec seulement deux masses.

Vous pouvez peut-être vous dire: “je suis fort et je peux forcer le gyroscope de sorte que l'axe de droite tourne vers le bas”. Vous avez raison. Vous n'avez même pas besoin d'être très fort. Mais pendant que vous forcez l'axe de droite vers le bas, vous constaterez que la force que vous êtes obligé d'exercer n'est pas dirigée vers le bas, mais vers l'avant!

On peut calculer la **vitesse de précession** du gyroscope. Imaginons que son moment cinétique soit $\vec{L}$, et qu'on lui applique un couple $\vec{\tau}$ perpendiculaire au moment cinétique. L'équation 9.3 nous dit que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

La variation de $\vec{L}$ durant un intervalle de temps Δt sera:

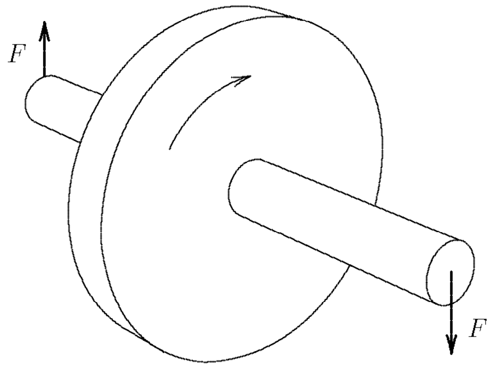
$$\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$$

Remarquez que $\Delta\vec{L}$ a la même direction que $\vec{\tau}$ et qu'il est perpendiculaire à $\vec{L}$. Comme l'intervalle de temps est petit ΔL est petit devant L et l'angle que fait le nouveau moment cinétique $\vec{L} + \Delta\vec{L}$ avec l'ancien $\vec{L}$ est:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\tau\Delta t}{L}$$

La vitesse de précession que nous cherchons est la vitesse angulaire du vecteur $\vec{L}$, qui est la même que celle de l'axe de rotation du gyroscope. Cette vitesse angulaire est:

$$\textbf{Vitesse de précession} = \Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L}$$



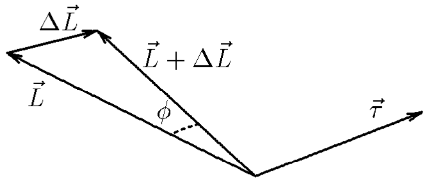


Figure 9.6 Tous les vecteurs du dessin en bas se trouvent sur un plan horizontal. Les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\Delta\vec{L}$ sont parallèles entre eux et perpendiculaires à $\vec{L}$.

La vitesse de précession est d'autant plus faible que le moment cinétique du gyroscope est grand.

L'intérêt d'utiliser un gyroscope pour maintenir une référence de position est la suivante: un objet quelconque, soumis à un couple, présente une *accélération* angulaire constante ce qui donne un angle de déplacement proportionnel au carré de l'intervalle de temps. Par contre, sur un gyroscope, un couple produit une *vitesse* angulaire constante ce qui donne un angle de déplacement proportionnel au temps. De plus, pour une même masse de l'objet, on peut atténuer la conséquence d'un couple en augmentant le moment cinétique de l'objet. Ceci s'obtient avec une bonne distribution de la masse et une vitesse de rotation élevée([5]).

On a utilisé des gyroscopes pour stabiliser mécaniquement des navires, aussi bien de surface que des sous-marins. Le *Nautilus*, premier sous-marin atomique, comportait un énorme gyroscope de plusieurs tonnes.

On a utilisé des gyroscopes pour créer des "plateformes inertielles", c'est-à-dire, des plateformes qui gardent leur orientation dans l'espace même quand elles sont tenues dans un support mouvant, comme un navire ou un avion. On les utilise encore pour stabiliser des caméras installées sur des hélicoptères.

Dans les avions conçus récemment, on n'utilise plus de gyroscopes mécaniques, mais des gyroscopes optiques qui fonctionnent sur des principes totalement différents.

9.4.2 La toupie.

Dans la figure de droite nous avons représenté une toupie qui tourne à gauche et qui est inclinée vers la gauche. Le poids de la toupie exerce une force $m\vec{g}$ sur le centre de masses. Cette force crée un couple $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g}$ dirigé horizontalement et perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}$ de la toupie.

Comme nous l'avons vu pour le gyroscope, ce couple produit, dans un intervalle de temps Δt une variation $\Delta L = \tau \Delta t$ de moment cinétique. Cette variation est perpendiculaire au vecteur moment cinétique $\vec{L}$, et parallèle au couple. Après ce temps Δt le nouveau vecteur $\vec{L}$ aura le même module qu'auparavant mais aura tourné dans la direction de $\vec{\tau}$. Mais cela veut dire que l'axe de la toupie aura tourné dans la direction de $\vec{\tau}$. Mais à mesure que l'axe de rotation de la toupie tourne, le centre de masses tourne aussi et la direction de $\vec{\tau}$ aussi. Si l'axe de rotation de la toupie est incliné de θ par rapport à la verticale, une variation ΔL du moment cinétique implique une rotation de l'axe de la toupie autour de l'axe y de:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L \sin\theta}$$

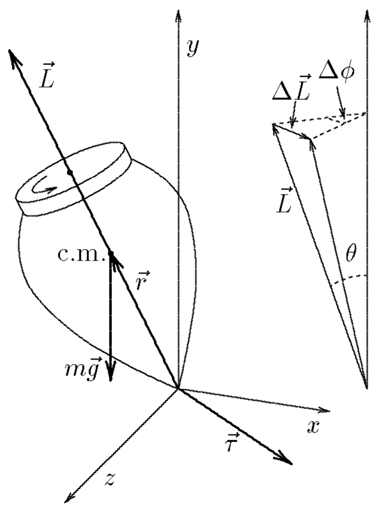


Figure 9.7 Le vitesse de précession ne dépend pas de l'inclinaison de la toupie.

L'axe de rotation de la toupie tourne autour de l'axe z avec une vitesse de précession:

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta L}{L \sin\theta}}{\Delta t} = \frac{\frac{\tau \Delta t}{L \sin\theta}}{\Delta t} = \frac{mgr \sin\theta}{L \sin\theta} = \frac{mgr}{L}$$

Remarquez que la vitesse de précession de dépend pas de l'inclinaison de l'axe de rotation de la toupie. Cette propriété est indispensable pour le fonctionnement des appareils utilisant la IRM (Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire) et, notamment, pour l'imagerie médicale.

([5]) Dans les avions on utilisait le "secteur" à 400 Hz ce qui donne une vitesse angulaire de 2513 rad/sec ou 24000 tours/min.

9.4.3 Le vélo.

L'effet gyroscope permet à des personnes "normales" sans qualités d'équilibristes de faire du vélo. Rester sur deux roues à l'arrêt, en équilibre, sur un vélo ou une moto est possible, mais peu de gens sont capables de le faire. Par contre rouler sur deux roues presque tout le monde peut le faire après une phase d'apprentissage qui consiste surtout à laisser tranquille le guidon. Car un vélo ou une moto qui roulent restent d'eux mêmes sur leurs deux roues

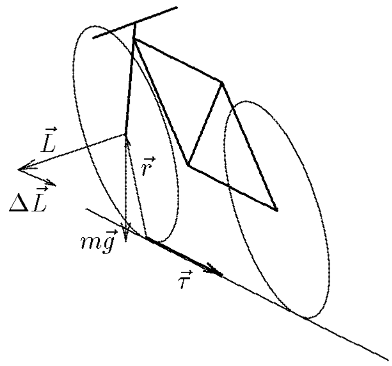


Figure 9.8 Quand le vélo penche vers la gauche, le couple créé par le poids sur la roue avant déplace le moment cinétique de celle-ci vers l'arrière et le fait tourner à gauche. Ceci continue jusqu'à que le couple créé par la force centrifuge créée par le virage, compense le couple dû au poids.

Dans la figure de droite nous avons représenté schématiquement un vélo en mouvement avec le guidon droit mais incliné vers la gauche. Le poids du vélo crée un couple $\vec{\tau}$ qui pousse le vélo à s'incliner d'avantage et à tomber. Mais si le vélo avance, la roue avant([6]) a un moment cinétique $\vec{L}$ dirigé vers la gauche. Le couple crée une variation de moment cinétique ΔL dirigée vers l'arrière. Cela veut dire que le moment cinétique de la roue avant tourne vers la gauche et cela se fait en tournant la roue avant vers la gauche (comme si on avait tourné le guidon vers la gauche). Le vélo amorce un virage à gauche et aussi longtemps que le couple incline le vélo à gauche le guidon tourne de plus en plus à gauche en diminuant le rayon de courbure du virage.

Vu du système accéléré (et non newtonien) du vélo, le virage se resserre, ce qui augmente la force centrifuge sur le vélo et qui crée un couple qui a tendance à pousser le vélo à droite et donc, à compenser le couple du poids qui l'incline vers la gauche. Quand les deux couples se compensent exactement le guidon s'arrête de tourner et le vélo continue son virage à rayon constant. S'il ne rencontre pas d'obstacle, la friction avec l'air le fera ralentir. En ralentissant la force centrifuge diminue et ne compense plus le couple dû au poids. Le guidon tourne un peu plus à gauche et le vélo continue son virage avec un rayon de courbure plus petit. Un vélo lancé droit (sans cycliste) commence à tourner et le rayon de courbure diminue à mesure que la vitesse du vélo diminue. Quand le guidon se bloque ou les roues dérapent, le vélo tombe.

Si on lance un vélo de la même façon mais avec le guidon bloqué, le vélo tombe sur le côté comme si on le lâchait à l'arrêt.

La situation est identique avec une roue ou une pièce de monnaie que vous faîtes rouler. Dès qu'un couple l'incline, la pièce change d'orientation de sorte que la force centrifuge équilibre le couple de déséquilibre. Le résultat est, comme pour le vélo, que la pièce décrit une spirale à mesure que sa vitesse diminue. Elle finit par décrire une spirale "sur place" quand la pièce est déjà presque horizontale.

9.4.4 Précession des équinoxes.

Un effet curieux de l'effet gyroscope est celui de la précession des **équinoxes**([7]). La terre tourne autour du soleil sur une orbite légèrement elliptique, contenue dans un plan qui contient également le soleil. Ce plan s'appelle, en astronomie, l'écliptique. La terre tourne autour d'elle-même autour de son axe de symétrie nord-sud. Or cet axe n'est pas perpendiculaire à l'écliptique mais incliné d'environ 23,5 degrés. De ce fait, quand la terre tourne autour du soleil la moitié de l'année le pôle nord "voit" le soleil en permanence (soleil de minuit), alors que le sud reste dans le noir (nuit polaire) et l'autre moitié de l'année c'est l'inverse: le pôle sud avec le soleil de minuit et le pôle nord sous la nuit polaire. Les deux jours de l'année où se fait la transition, des deux

([6]) La roue arrière a aussi un moment cinétique mais la façon comme elle est fixée ne lui permet de jouer aucun rôle dans l'équilibre du vélo.

([7]) Du latin aequus (égal) et nox (nuit) pôles on voit le (demi) soleil faire le tour de l'horizon, et dans tous les autres endroits de la terre la durée de la journée est la même que celle de la nuit (12 heures, évidemment).

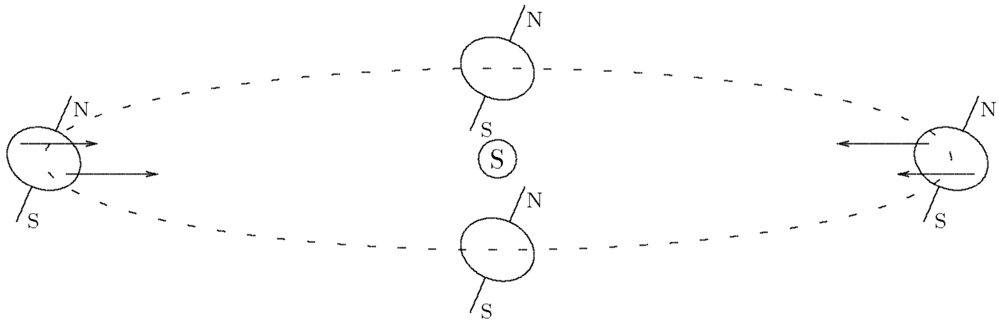
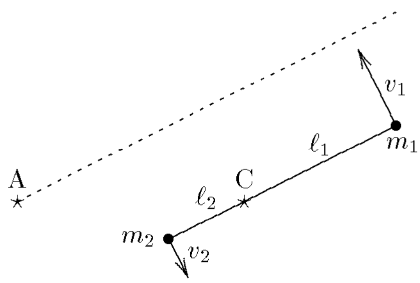


Figure 9.9 Dans la figure l'aplatissement polaire de la terre est très exagéré. Les deux terres au centre sont aux équinoxes et les deux autres aux solstices. Les forces d'attraction sur le gonflement équatorial, sont différentes de chaque côté de la terre à cause de leur dépendance avec l'inverse du carré de la distance.

La terre tourne autour de son axe et la prolongation de cet axe de rotation vers le ciel tombe sur le pôle nord céleste. Près de cette direction se trouve une étoile bien connue: l'étoile polaire. Si rien ne venait troubler la rotation de la terre, son moment cinétique resterait constant et l'étoile polaire serait toujours la même. Comme vous l'avez deviné, ce n'est pas le cas. Le problème est que la terre est légèrement aplatie aux pôles à cause de la rotation et de la force centrifuge([8]). Ceci lui fait un "gonflement" autour de sa partie équatoriale. La force d'attraction gravitationnelle est inversement proportionnelle à la distance au carré. La conséquence est que le "gonflement" du côté du soleil est légèrement plus proche de celui-ci que le "gonflement" de l'autre côté de la terre. De plus, sauf aux équinoxes, les deux gonflements ne se trouvent pas à la même hauteur (chacun se trouve de l'autre côte de l'écliptique). Le résultat est un couple dirigé le long de l'orbite terrestre. Ce couple impose un mouvement de précession à la terre. L'axe de rotation de la terre reste toujours incliné de 23,5 degrés, mais tourne avec une période d'environ 27000 ans. Pendant ce temps, le pôle nord céleste décrit un cercle sur le ciel de 23,5 degrés de rayon. Le résultat est que les jours des équinoxes se décalent dans le temps. Ce n'est pas beaucoup mais cela fait quand même un jour tous les 74 ans, ce qui est énorme pour un astronome.

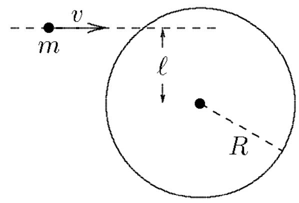
9.5 Exercices.

1 - Deux masses m_1 et m_2 tournent à vitesse angulaire ω autour de leur centre de masses **C** à des distances ℓ_1 et ℓ_2. Calculez le moment angulaire en prenant comme référence ce centre de masses, puis calculez-le à nouveau en prenant comme référence un point quelconque **A**. Commencez par calculer le cas où $m_1 = m_2$ et $\ell_1 = \ell_2$.
Suggestion: Utilisez la "méthode" $L = \sum mv\cdot$*(bras de levier)* et utilisez la ligne pointillée du dessin.
R.: Le moment angulaire ne dépend pas du point de référence.

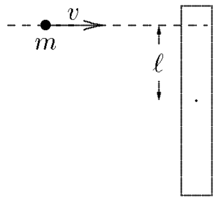


([8]) Ceci fut une des prédictions de Newton, conséquence de ses lois du mouvement. La vérification de cet aplatissement convainquit les plus réticents à la théorie de Newton.

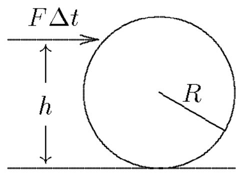
2 - Un projectile de masse $m = 10\,g$ et vitesse $v = 300\,m/s$ s'incruste dans une roue cylindrique en bois de masse $M = 2\,kg$ et rayon $R = 25\,cm$. La trajectoire du projectile traverse la roue à une distance $\ell = 20\,cm$ de l'axe de rotation et perpendiculairement à celui-ci. Calculez la vitesse angulaire de la roue après l'impact.
R.N.: $9{,}54\,rad/s$.



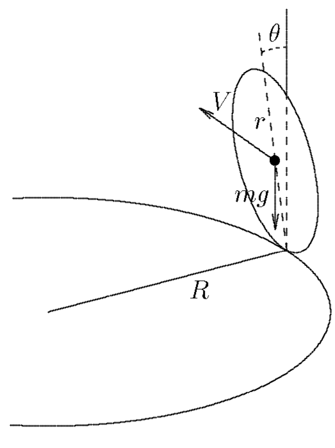
3 - Un projectile de masse $m = 10\,g$ et vitesse $v = 300\,m/s$ s'incruste dans un parallélépipède en bois de longueur $L = 50\,cm$ et largeur $d = 8\,cm$ et de masse $M = 2\,kg$. Le parallélépipède repose sur une surface horizontale et peut se déplacer sans friction. La trajectoire du projectile traverse le parallélépipède à une distance $\ell = 20\,cm$ du centre et parallèlement à la surface. Calculez la vitesse (linéaire) du centre de masses et la vitesse angulaire de l'objet après l'impact.
R.N.: $V_{cm} = 1{,}49\,m/s$; $\omega = 13{,}91\,rad/s$.



4 - Quant on attaque une bille de billard très bas (près du tapis), elle se met à avancer mais en tournant vers l'arrière ce qui fait que la bille ralentit et peut même inverser sa vitesse et revenir. Au contraire, si l'on attaque la bille très haut, l'excès de vitesse de rotation se traduit par une augmentation de la vitesse vers l'avant. Calculez la hauteur d'attaque h à laquelle il faut frapper une bille pleine de rayon R pour que la vitesse de translation et la vitesse de rotation communiquées par la queue fassent que la bille roule sans glisser (même si le coefficient de friction entre la bille et le tapis était zéro).
Nota: remarquez qu'à partir de $F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$ on déduit $F\Delta t = m\Delta v$. De même, à partir de $\tau = I\alpha = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, on déduit $\tau\Delta t = I\Delta\omega$
R.: $h = \frac{7}{5}R$. .



5 - Pièce qui roule (version soft). Quand une pièce de monnaie roule par terre, elle finit par s'incliner et décrit des cercles de rayon décroissant à mesure que la vitesse diminue. Quand la pièce est inclinée, son poids crée un couple qui tend à la faire tomber. Mais, comme la pièce roule, l'effet du couple est de créer un mouvement de précession qui fait que la monnaie tourne vers "la direction vers laquelle elle tombe" (si elle s'est inclinée vers la gauche, elle tourne à gauche). Elle ne tombe pas, mais décrit un cercle.
Soit une pièce d'un euro (diamètre: $2r = 23{,}25\,mm$, masse: $7{,}5\,g$) qui roule à une vitesse $V = 1{,}2\,m/s$ et qui présente une inclination de $\theta = 5°$. Calculez la vitesse de rotation ω et le moment angulaire L de la pièce. Calculez le couple τ_p provoqué par le poids de la pièce. Calculez la vitesse (angulaire) Ω de précession. À partir de la vitesse tangentielle V et de la vitesse angulaire Ω déduisez le rayon R du cercle décrit au sol par la pièce.
R.N.: $R = v^2/(2g\sin\theta) = 0{,}84\,m$.



6 - Pièce qui roule (version adultes). À partir des résultats de l'exercice précédent, calculez la force centrifuge subie par la pièce du fait qu'elle décrit un cercle de rayon R. Cette force crée un couple qui tend à redresser la pièce. En conséquence, les résultats calculés dans l'exercice précédent sont faux car il fallait utiliser le couple résultant: couple dû au poids moins couple dû à la force centrifuge (lequel dépend du rayon de courbure, lequel dépend du couple résultant). Il faut donc exprimer la force centrifuge en fonction de Ω et de R (inconnus). À partir de ça, le couple résultant: couple dû au poids moins couple dû à la force centrifuge. Et à partir de ça, calculer la vitesse de précession Ω. Il vous restera une

équation en Ω et R. Comme $\Omega R = V$, on peut déduire R.
R.N.: $R = v^2(1 + 2\cos\theta)/(2g\sin\theta) = 2{,}52\,m$.

7 - Un bâton fin de longueur L et de masse m est lancé à une vitesse v en tournoyant sur lui même avec une vitesse angulaire ω. À un instant où le bâton est perpendiculaire à sa trajectoire le bâton se divise en deux morceaux identiques de longueur et masse moitié. Montrez que chaque morceau continue a tourner avec la même vitesse angulaire ω. Calculez le moment angulaire du système après la séparation pour constater qu'il est égal à celui d'avant la séparation.

8 - Faites le problème précèdent avec le bâton qui se sépare à un instant où il est parallèle à la sa trajectoire.

9 - On veut calculer le rapport des vitesses angulaires ω_2/ω_1 d'un patineur qui commence à tourner à vitesse angulaire ω_1 avec les bras ouverts et qui atteint ω_2 quand il serre les bras le long du corps. Pour ceci il faut faire un calcul approximatif du moment d'inertie d'un homme debout autour de son axe de symétrie vertical. Faites un calcul similaire pour le moment d'inertie d'un bras (du même homme) autour d'un axe passant par son milieu et perpendiculaire au bras. Faites le calcul approximatif du moment d'inertie du même sujet debout mais avec les deux bras ouverts.
Approchez l'homme et ses bras par des cylindres de dimensions appropriées et de densité égale à celle de l'eau. Les rayons des cylindres à utiliser sont les rayons "moyens" et non les extrêmes.
R.N.: $1{,}1\,kg\,m^2$ (valeur "officielle"); bras $\simeq 0{,}08\,kg\,m^2$; Homme bras ouverts: $\simeq 3{,}3\,kg\,m^2$; $\frac{\omega_2}{\omega_1} \simeq 3$

10. STATIQUE OU ÉQUILIBRE DES CORPS.

Ce chapitre est dédié à la statique ou équilibre des corps, et exclusivement aux corps rigides. Un corps est en équilibre quand il ne bouge pas. Dans le langage de tous les jours on parle d'équilibristes et des corps en équilibre. C'est un usage un peu restrictif du mot car il s'agit des personnes ou des corps en équilibre instable ou presque instable. Nous allons utiliser le mot dans son sens large. La chaise sur laquelle vous êtes assis est en équilibre et la table aussi. Le stylo posé sur une extrémité plate ou un château de cartes sont aussi en équilibre, même s'il ne faut pas respirer trop fort. Nous irons plus loin: une aiguille placée sur sa pointe est en équilibre instable: la moindre perturbation (comme le mouvement brownien des molécules dans l'air) la fera sortir de son état d'équilibre. Néanmoins, avant de commencer à tomber, elle était en équilibre.

10.1 Conditions d'équilibre mécanique des corps.

Pour qu'un corps soit en équilibre de translation, il faut que l'accélération linéaire de son centre de masses soit zéro. Nous avions vu que pour que cette condition soit satisfaite il fallait que la somme des forces extérieures aux particules qui forment le corps soit zéro.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{ext.}}{M} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}_{ext.} = 0$$

$\vec{F}_{ext.}$ est la somme de toutes les forces extérieures. C'est une équation vectorielle que l'on peut décomposer:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots = 0 \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots = 0 \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Pour qu'un corps rigide soit en équilibre rotationnel, il faut que l'accélération angulaire soit égale à zéro. Nous avions vu que pour cela il fallait que la somme de tous les couples externes $\vec{\tau}$ soit égale à zéro:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots = 0$$

Comme précédemment, cette équation vectorielle peut être décomposée:

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_{1x} + \tau_{1x} + \cdots = 0 \\ \tau_y &= \tau_{1y} + \tau_{1y} + \cdots = 0 \\ \tau_z &= \tau_{1z} + \tau_{1z} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Dans ces équations l'axe autour duquel l'accélération angulaire et le couple doivent être zéro n'est pas précisé. En fait, il faut que l'accélération angulaire et le couple soient nuls autour de n'importe quel axe. Nous n'avons pas besoin d'établir la condition pour l'infinitude d'axes possibles([1]). Pour prouver ceci on peut prouver le théorème suivant: "Soit τ_{o} la somme des couples externes par rapport à l'axe O. La somme de couples externes τ_p par rapport à l'axe P, parallèle à l'axe O, est égale à la somme de τ_{o} plus le couple, par rapport à l'axe P, de la force résultante appliquée en O. "

([1]) On peut prouver qu'il suffit de trois axes mutuellement perpendiculaires.

Nous allons nous limiter à une seule direction de l'axe (parallèle à l'axe z) car la situation est identique pour les autres axes. Pour le moment regardons le couple dû à une seule force externe F_1 appliquée au point $(x_1,\, y_1)$ (voir dessin). Le couple τ_o de cette force par rapport à l'axe O est:

$$\tau_o = F_{1y}x_1 - F_{1x}y_1$$

(le couple est positif quand on tourne à gauche et négatif quand on tourne à droite). Le couple de cette même force par rapport à l'axe P est:

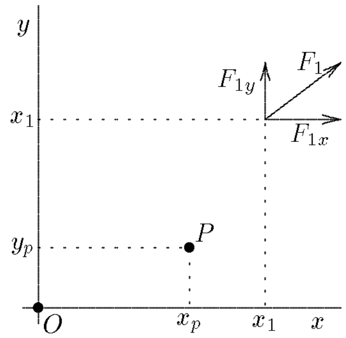


Figure 10.1 Les deux axes de référence O et P sont perpendiculaires au dessin.

$$\tau_p = F_{1y}(x_1 - x_p) - F_{1x}(y_1 - y_p)$$

$$\tau_p = F_{1y}x_1 - F_{1x}y_1 - F_{1y}x_p + F_{1x}y_p$$

Remarquez que les deux premiers termes sont le couple de la force F_1 par rapport à l'axe O, autrement dit τ_o. Les deux derniers termes sont le moment qu'aurait eu la force F_1 par rapport à l'axe O si elle avait été appliquée en P. La démonstration est donc faite pour une seule force externe.

Si nous avons plusieurs forces il faut faire la somme sur toutes les forces:

$$\tau_p = \sum_i F_{iy}x_i - \sum_i F_{ix}y_i - x_p \sum_i F_{iy} + y_p \sum_i F_{ix}$$

Les deux premiers termes sont le couple de toutes les forces externes par rapport à l'axe O. Les deux derniers sont le couple qu'aurait eu la somme des forces externes si cette somme des forces avait été appliquée au point P:

$$\tau_p = \tau_o - x_p F_y + y_p F_x$$

Si le corps est en équilibre de translation, la somme des forces externes est zéro et $\tau_p = \tau_o$. Donc, pour un corps en équilibre, si le couple par rapport à un certain axe est zéro, il est aussi zéro par rapport à n'importe quel autre axe parallèle au premier.

Nous avons en tout six conditions à satisfaire pour qu'un corps soit en équilibre: somme des forces externes et somme des couples externes égales à zéro pour chacun des trois axes.

10.2 Centre de gravité.

Le **centre de gravité** d'un objet est le point d'application de la résultante de l'ensemble des forces de gravité agissant sur toutes les particules d'un corps. Pour la coordonnée x, le centre de gravité est donnée par:

$$x_{cg} = \frac{\sum_i m_i g_i x_i}{\sum_i m_i g_i}$$

où g_i est l'accélération de gravité qui agit sur la particule i de masse m_i. Les formules pour les autres coordonnées sont similaires.

Si cette accélération de gravité est la même pour toutes les particules, on peut sortir le facteur g. Dans ce cas la formule devient:

$$x_{cg} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Ce qui est la formule de la coordonnée du centre de masses (voir chapitre 6). Donc, dans le cas où la gravité peut être considérée constante dans tout le volume du corps, le centre de gravité coïncide avec le centre de masses.

Ceci est valable pour des objets petits (c'est quoi petit?) et encore, pas dans tous les cas. Il ne faut pas oublier que la force d'attraction gravitationnelle est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance qui sépare les deux masses. Pour un objet dont les dimensions ne sont pas négligeables par rapport à la distance à l'objet qui l'attire, les parties plus proches subiront une attraction plus forte que les parties éloignées. Dans ce cas, le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre de masses. Nous avons déjà donné un exemple dans lequel la dépendance de l'attraction gravitationnelle avec la distance donnait des effets remarquables. C'était dans l'explication de la précession des équinoxes en 9.4.

Un autre cas similaire se présente pour les satellites en orbite. Comme le satellite est en orbite, la force d'attraction de la terre est globalement et exactement compensée par la force centrifuge. Les phénomènes de deuxième ordre peuvent alors se manifester clairement. Imaginez un satellite de forme allongée en position verticale et tournant autour de la terre, de sorte que la partie basse reste toujours plus basse. Cette partie basse est plus attirée par la terre que la partie haute car elle est plus proche du centre de la terre. De plus, comme la vitesse angulaire du satellite autour de la terre est la même pour les deux parties du satellite, la force centrifuge $\omega^2 r$ sera plus grande pour la partie haute du satellite que pour la partie basse. Le résultat est que des forces de deuxième ordre (très petites comparées au poids du satellite) attirent le bas du satellite vers la terre et poussent le haut vers l'espace. Le satellite a donc tendance à se stabiliser dans cette position. Mais si on inverse le haut et le bas il se stabiliserait aussi dans la nouvelle position. Par contre la position "horizontale" est plutôt instable. Dans le jargon du métier cette situation de forces gravitationnelles de deuxième ordre s'appelle **microgravité**.

Si, au lieu de parler du haut et du bas du satellite, on calcule la position du centre de gravité, on trouvera celui-ci un peu plus bas que le centre de masses. Ceci est vrai pour n'importe quelle position du satellite mais plus flagrant si le satellite est de forme allongée et vertical. Le poids du satellite, appliqué au centre de gravité produit un couple par rapport à un axe horizontal passant par le centre de masses. Ce couple a tendance à faire tourner le satellite de sorte que le centre de gravité descende.

Si on suspend un objet autour d'un axe, il prendra sa position d'équilibre quand le couple des forces externes sera nul. Comme nous l'avons vu ce couple sera égal au couple créé par le poids de l'objet appliqué au centre de gravité. Pour que ce couple soit nul il faut que le centre de gravité se trouve à la verticale du pivot.

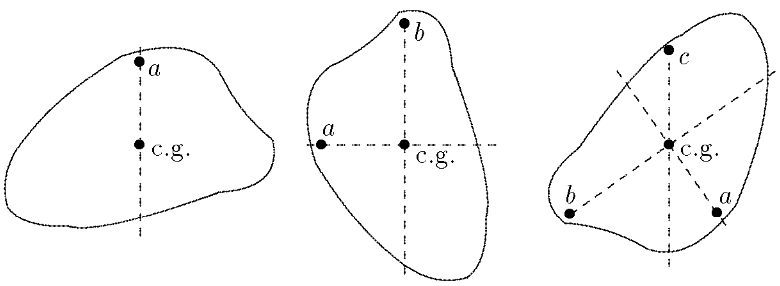


Figure 10.2 Méthode utilisée par les bricoleurs pour trouver, de façon approchée, le centre de gravité d'un objet plat. Elle figure ici pour respecter la tradition.

Si on suspend un objet plat à partir de plusieurs axes et qu'on laisse l'objet prendre sa position d'équilibre, le centre de gravité se trouvera toujours à la verticale de l'axe. L'intersection de ces verticales permet de trouver le centre de gravité. Cette méthode ne présente pas grand intérêt. Elle est peu précise et ne fonctionne que pour des objets plats. Il est rare que l'on ait à trouver le centre de gravité d'un objet de ce genre.

Exemple 10.1 Centre de gravité d'un objet. Pour trouver la position du centre de gravité d'une voiture on peut utiliser la méthode suivante. On met chaque roue de la voiture sur une balance avec la voiture horizontale et on relève les mesures. Puis on refait les mêmes mesures mais en soulevant le devant ou l'arrière de la voiture.

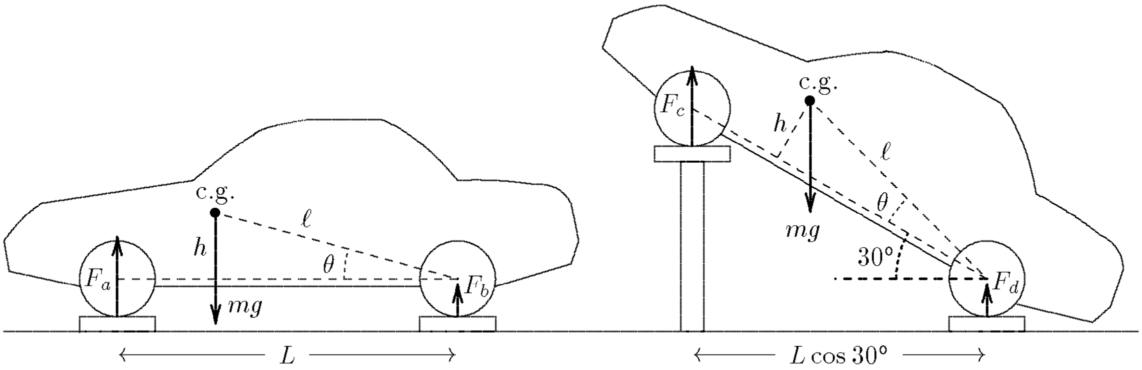


Figure 10.3 Pour trouver le centre de gravité d'une voiture on mesure la charge par essieu avec la voiture horizontale et inclinée.

Les données numériques sont les suivantes: Distance L entre essieux: 2,70 *mètres*. Charge sur les essieux:

	avant	*arrière*
Voiture horizontale	$7363\,N$	$2937\,N$
Inclinée 30°	$6237\,N$	$4063\,N$

Le poids de la voiture est, évidemment, la somme des charges sur les essieux, soit: $mg = 7363 + 2937 = 10300\,N$.

Comme la voiture est en équilibre, le couple autour de n'importe quel axe doit être zéro. Nous allons calculer le couple par rapport à l'essieu arrière (centre des roues arrière). Par rapport à cet axe la réaction du sol sur la roue arrière donne un couple zéro car son bras est nul. Les seuls deux couples qui restent sont: celui produit par le poids mg et celui de la réaction sur l'essieu avant. Il doivent s'annuler:

$$F_a L = mg\ell\cos\theta$$

où ℓ est la distance entre l'essieu arrière et le centre de gravité et θ l'angle que fait cette distance avec l'horizontale. Ceci nous permet de calculer directement $\ell\cos\theta$ qui est la position horizontale du centre de gravité par rapport à l'essieu arrière. On obtient:

$$\ell\cos\theta = \frac{F_a L}{mg} = \frac{7363 \cdot 2{,}70}{10300} = 1{,}930\,m$$

Le centre de gravité se situe donc à la verticale d'un point situé à $1{,}930\,m$ de l'essieu arrière et à $2{,}70 - 1{,}930 = 0{,}77\,m$ de l'essieu avant.

Pour déterminer la hauteur du centre de gravité il faut une donnée supplémentaire. On l'obtient en faisant la même mesure avec la voiture inclinée vers l'avant ou vers l'arrière. La raison pour laquelle cette nouvelle mesure peut déterminer la hauteur du centre de masses est que, en inclinant la voiture, les bras de levier du poids et de la réaction sur les essieux vont diminuer dans des rapport différents du fait que le centre de gravité ne se trouve pas à la hauteur des essieux. Si nous calculons à nouveau les couples autour de l'essieu arrière on obtient:

$$F_c L\cos 30° = mg\ell\cos(30° + \theta)$$

Pour la voiture horizontale, nous avions trouvé:

$$F_a L = mg\ell\cos\theta$$

En divisant les deux équations on obtient:

$$\frac{F_c}{F_a}\cos 30° = \frac{\cos(30° + \theta)}{\cos\theta} = \frac{\cos 30°\cos\theta - \sin 30°\sin\theta}{\cos\theta} = \cos 30° - \sin 30°\tan\theta$$

d'où on tire:

$$\tan\theta = \frac{1-\frac{F_c}{F_a}}{\tan 30^\circ} = 0{,}2649$$

et $\theta = 14{,}838^\circ$. Ceci permet de calculer la hauteur h du centre de gravité par rapport aux essieux:

$$h = 1{,}930\,\tan\theta = 0{,}5113\,mètres$$

Pour déterminer la position latérale du centre de gravité il faudrait refaire une autre mesure en inclinant la voiture à gauche ou à droite.

Exemple 10.2 Échelle contre un mur.

Une échelle de longueur $L = 2{,}33\,m$ et de masse $m = 8\,kg$ est appuyée sur un mur sans friction de sorte que le haut de l'échelle se trouve à $2\,m$ de hauteur. Le point bas est appuyé à $1{,}2\,m$ du mur (voir figure 10.4). On admet que le centre de masses de l'échelle se trouve, dans cette position, à $60\,cm$ du mur. On souhaite calculer les forces exercées sur l'échelle par le mur et par le sol. Comme l'échelle est en équilibre de translation, les forces verticales doivent s'annuler. Ici nous n'avons que le poids et la composante normale de la réaction du sol:

$$mg = F_N = 8 \cdot 9{,}81 = 78{,}48\,N$$

Pour que les forces horizontales s'annulent, il faut que la réaction du mur s'équilibre avec la force de friction exercée par le sol:

$$F_2 = F_f$$

Pour satisfaire l'équilibre de rotation nous allons calculer le couple autour du point d'appui au sol (cela met hors jeu F_N et F_f). Le couple produit par le poids doit se compenser avec celui produit par le mur:

$$mg\frac{L}{2}\cos\theta = F_2 L \sin\theta$$

Comme l'angle θ est connu, on déduit:

$$F_2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{\tan\theta} = \frac{1}{2}\frac{8\cdot 9{,}81}{2/1{,}2} = 23{,}54\,N$$

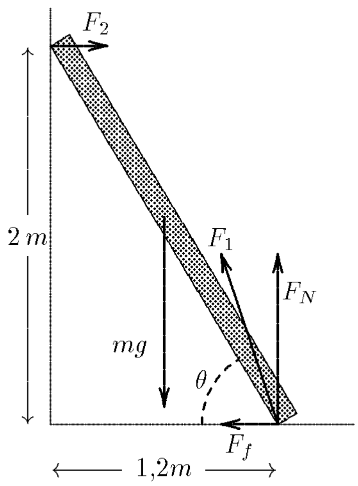


Figure 10.4 Échelle appuyée sur un mur sans friction.

La force de friction F_f doit être égale à F_2 pour que l'échelle ne glisse pas. F_1 est égale à la somme (vectorielle) de F_N et F_f.

Le module de F_1 est:

$$F_1 = \sqrt{78{,}48^2 + 23{,}54^2} = 81{,}94\,N$$

Pour que l'échelle ne glisse pas il faut que le coefficient de friction statique soit égal ou supérieur à:

$$\mu_s = \frac{F_f}{F_N} = \frac{23{,}54}{78{,}48} = 0{,}30$$

(mais pour que je monte il faudrait que le coefficient de friction dynamique soit aussi plus grand que 0,30).

Exemple 10.3 Mât de charge.

Une poutre de poids négligeable et de 4,47 m de longueur est tenue à un mur par un axe sur laquelle elle peut pivoter. Un hauban tient la poutre dans la position indiquée dans la figure. Un poids de 5000 N (environ une demi tonne dans le langage courant) est accroché à l'extrémité. Calculer les différentes forces sur la poutre.

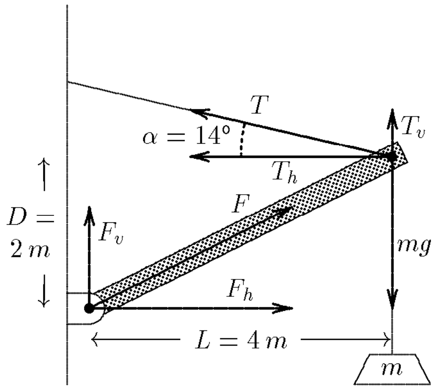


Figure 10.5 Mât de charge. La poutre peut pivoter autour de son support. La tension du câble maintient la poutre en place.

Comme d'habitude, l'équilibre demande que les couples autour de n'importe quel axe soient nuls. On calcule le couple autour du pivot de la poutre. Le poids exerce un couple vers la droite. Ce couple est compensé par le couple créé par le hauban:

$$mg\,L = LT\sin\alpha + DT\cos\alpha$$

d'où:

$$T = \frac{mgL}{L\sin\alpha + D\cos\alpha} = \frac{5000 \cdot 4}{4\sin 14° + 2\cos 14°} \simeq 6877\,N$$

L'équilibre de translation demande que les forces se compensent. Pour les forces horizontales nous n'avons que T_h et F_h:

$$T_h = T\cos\alpha = F_h$$

$$F_h = 6877\cos 14° \simeq 6673\,N$$

Pour les forces verticales:

$$F_v = mg - T_v = 5000 - T\sin\alpha \simeq 3336\,N$$

On peut vérifier les résultats en calculant le couple autour de l'extrémité de la poutre:

$$\tau = D\,F_h - L\,F_v = 2 \cdot 6673 - 4 \cdot 3336 \simeq 0$$

(aux erreurs d'arrondi près) ce qui est rassurant.

Si le poids P de la poutre n'avait pas été négligeable il aurait suffit de le rajouter dans les équations du couple:

$$mg\,L + P\frac{L}{2} = LT\sin\alpha + DT\cos\alpha$$

Le poids modifie aussi l'équation des forces verticales:

$$F_v = mg + P - T_v$$

10.3 Stabilité.

On dit qu'un corps est en **équilibre instable** quand une toute petite rotation du corps crée un couple qui a tendance à augmenter la rotation (une petite rotation à droite crée un couple à droite). C'est l'exemple d'un crayon placé verticalement sur sa pointe. Si son centre de gravité est exactement au dessus de la pointe, aucun couple n'agit sur le crayon. Mais dès qu'une perturbation déplace le centre de gravité vers la droite, il se crée un couple qui a tendance à faire tourner le crayon vers la droite. Ce couple est d'autant plus grand que le crayon s'éloigne de la verticale: le crayon tombe.

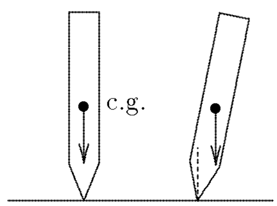


Figure 10.6 Équilibre instable. Une petite perturbation s'amplifie et entraîne la chute.

On dit qu'un corps est en **équilibre indifférent** quand une toute petite rotation du corps ne crée aucun couple. L'exemple type est celui d'une sphère sur un plan horizontal. Même si la sphère tourne, son centre de gravité reste au dessus du point d'appui et nul couple ne se crée. La sphère est toujours stable, même si une petite perturbation peut la faire tourner facilement (voir plus loin).

On dit qu'un corps est en **équilibre stable** quand une toute petite rotation du corps crée un couple qui tend à ramener le corps à sa position initiale. On pourrait penser que pour qu'un corps soit en équilibre stable il faut que la verticale qui passe par son centre de gravité passe à l'intérieur de la base d'appui du corps. Ceci est une condition suffisante mais elle n'est pas nécessaire. On peut trouver des exemples amusants de corps en équilibre stable dans lequel le point d'appui est un point.

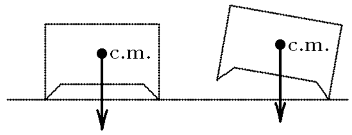


Figure 10.7 Équilibre stable. Une perturbation crée un couple qui a tendance à ramener le corps vers la position initiale.

Au lieu de réfléchir en termes de forces et couples, on peut réfléchir en termes d'énergie potentielle. Un corps est en **équilibre stable** si une petite variation de sa position augmente son énergie potentielle. De même, un corps est en **équilibre indifférent** si une petite variation de sa position ne modifie pas son énergie potentielle. Finalement, un corps est en **équilibre instable** si une petite variation de sa position diminue son énergie potentielle.

Cette définition de stabilité est beaucoup plus générale que celle basée sur les forces. Elle est même valable pour l'équilibre chimique([2]) ou électrique. Avec cette définition on voit que la situation d'équilibre d'une bille à l'intérieur d'un bol est au plus bas du bol, ou que la situation d'équilibre d'un condensateur est déchargé.

Mais tous les équilibres stables se sont pas égaux. On sent qu'il y a des équilibres stables qui sont "peu stables" est d'autres équilibres stables qui sont "très stables". Par exemple une pièce de monnaie ou une cassette vidéo sont plus stables à plat que sur un chant, alors que les deux positions sont des équilibres stables.

La mesure de cette "stabilité de l'équilibre stable" est le travail (ou l'énergie) qu'il faut fournir pour faire passer le corps de sa situation d'équilibre stable à sa situation d'équilibre instable.

Par exemple, dans la figure à droite, pour passer de l'équilibre stable à l'équilibre instable, il faut faire basculer le parallélépipède de la position à gauche jusqu'à sa position à droite pour que la verticale du centre de gravité soit sur l'arête de droite. Pour cela il faut faire monter le centre de gravité d'une hauteur Δh.

$$\Delta h = \tfrac{1}{2}\sqrt{h^2 + \ell^2} - \tfrac{1}{2}h$$

Ce qui fait une augmentation d'énergie potentielle de $mg\Delta h$. Dans cet exemple on voit que l'énergie à fournir diminue très vite quand ℓ devient petit devant h. Autrement dit, l'équilibre stable est très précaire quand la largeur est plus petite que la hauteur.

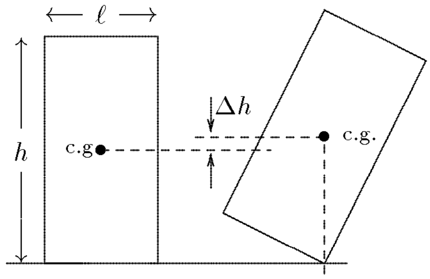


Figure 10.8 L'équilibre est stable jusqu'à la position de droite. L'énergie à fournir est proportionnelle à Δh.

Toutes les tables carrées sont bancales. Pour qu'elles ne le soient pas il faudrait que l'extrémité des quatre pattes soit sur un plan et que le sol soit aussi un plan. Aucune des deux exigences ne rentre dans les capacités des menuisiers ou des maçons. Heureusement la souplesse des tables compense, en partie, les imperfections. On peut se demander pourquoi on persiste à faire des tables carrées alors que des tables tripodes ne sont jamais bancales, même sur un sol irrégulier. La raison est que, pour des dimensions de tables usuelles, l'équilibre d'une table tripode est beaucoup plus précaire que celui d'une table tétrapode (à quatre pattes).

Mais pour la même raison, l'équilibre d'une table à six pattes est meilleur que celui d'une à cinq pattes, lequel est meilleur que celui d'une à quatre pattes. La table la plus stable est une table ronde avec un nombre infini de pattes. Si l'on fait surtout des tables à quatre pattes c'est

([2]) Là où un physicien dirait "La situation d'équilibre de la tour Eiffel est: couchée", un chimiste rétorque "La situation d'équilibre de la tour Eiffel est: un tas de rouille".

que l'on gagne beaucoup en stabilité en passant de trois à quatre pattes, mais relativement peu en augmentant le nombre de pattes. La situation est la même pour les chaises.

Voici une curiosité. Les deux objets de droite sont appuyés sur un point. Celui de gauche est en équilibre stable alors que celui de droite est en équilibre instable. La raison est que les faces basses et hautes des deux objets sont sphériques mais avec des rayons de courbure différents. Le centre de courbure de l'objet de gauche se trouve au dessus du centre de gravité. Ceci fait que quand l'objet s'incline, le centre de gravité monte: il faut lui fournir de l'énergie. Pour l'objet de droite c'est l'inverse: le centre de courbure est plus bas que le centre de gravité. Quand l'objet s'incline le centre de gravité descend; ceci accélère l'inclinaison, et l'objet chute. Si le centre de courbure avait coïncidé avec le centre de gravité l'objet serait en équilibre indifférent: la hauteur du centre de gravité ne changerait pas avec l'inclinaison. En fait l'objet serait un morceau de sphère.

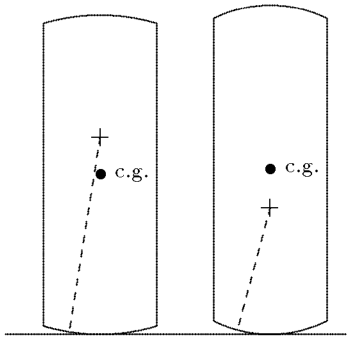


Figure 10.9 L'objet de gauche est en équilibre stable. Celui de droite est en équilibre instable.

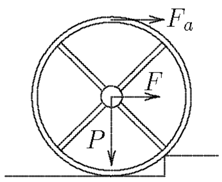
10.4 Exercices.

1 - Le centre de masses d'un objet de $5\,m$ de longueur est situé à $2\,m$ de l'extrémité lourde. Si deux personnes veulent le transporter et qu'une des deux se place à l'extrémité lourde, où doit se placer l'autre personne pour que les deux portent le même poids?
R.N.: à $4\,m$ de l'extrémité lourde.

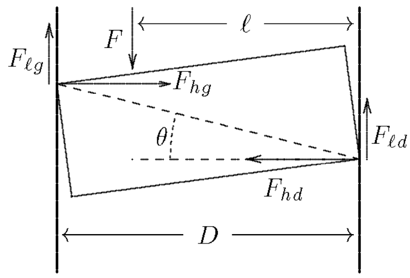
2 - Soit une caisse parallélépipédique de $80\,cm$ de haut et $50\,cm$ de large et de masse $m = 50\,kg$. Le coefficient de friction entre la caisse et le sol est de 0,4. Son centre de gravité se trouve au centre (mi-hauteur, mi-largeur). Calculez quelle est la force horizontale nécessaire pour faire glisser la caisse. Calculez la hauteur maximum à laquelle on peut appliquer la force pour que la caisse glisse sans basculer.
R.N.: $196{,}2\,N$; $62{,}5\,cm$.

3 - Une table de $2\,m$ de long, $75\,cm$ de hauteur et de masse $M = 50\,kg$ est appuyée sur quatre pattes situées aux coins. Le centre de gravité de la table se situe au centre et $10\,cm$ sous la surface de la table. Le coefficient de friction des pattes avec le sol est de 0,4. On fait glisser la table en appliquant une force horizontale au niveau de la surface de la table. Calculez la force nécessaire pour faire glisser la table ainsi que les forces verticales et horizontales exercées par le sol sur les pattes avant et arrière de la table.
R.N.: $f_h = 0{,}4Mg$; $f_{1h} = 0{,}14Mg$; $f_{1v} = 0{,}35Mg$; $f_{2h} = 0{,}26Mg$; $f_{2v} = 0{,}65Mg$;.

4 - Au Far West, pour désembourber un chariot de caravane, certains poussaient le corps du chariot, mais d'autres poussaient le haut des roues. Pour voir qui était plus efficace, calculez la force horizontale à exercer pour faire monter à une roue de poids $P = 2000\,N$ et de diamètre $D = 1{,}5\,m$ une marche de hauteur $h = 10\,cm$. D'abord avec une force F exercée au niveau de l'axe, puis avec une force F_a exercée en haut de la roue. Pour ces forces, la direction horizontale n'est pas la plus efficace. Quelle est la meilleure direction?
R.N.: $1151\,N$; $534{,}5\,N$.

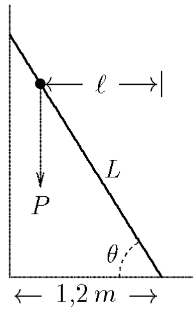


5 - Le tiroir qui grippe. Quand on pousse un tiroir, il arrive qu'il coince. Il appuie sur les côtés avec deux coins et si vous poussez plus fort il se coince d'avantage. Le tiroir de la figure glisse (ou coince) sur une ouverture de largeur D. On pousse avec une force F décentrée ou non. Il s'appuie sur les côtés et à cause du coefficient de friction μ, des forces horizontales F_{hg}, F_{hd} et longitudinales $F_{\ell g}$, $F_{\ell d}$ apparaissent. Commencez par supposer que le tiroir glisse. Démontrez (par des raisonnements, pas avec des formules) que les forces horizontales sont identiques au signe près et que, en conséquence, les forces longitudinales le sont aussi. Déduisez la relation entre les forces longitudinales et les forces horizontales. Déduisez la valeur maximum que peut prendre le coefficient de friction pour que la glisse soit possible. Examinez le cas $D = 0{,}8\,m$, $\ell = 0{,}6\,m$, $\theta = 10°$ et $\mu = 0{,}40$.



R.: Il grippe.

6 - Calculez jusqu'à quelle hauteur on peut monter dans l'échelle de l'exemple 10.3 du fascicule (page 10.5) avant que le pied de l'échelle ne glisse. Cette fois, l'ensemble du poids de l'échelle plus celui du futur accidenté n'est pas appliqué au milieu de l'échelle mais se déplace vers le mur à mesure que la victime monte. Calculez jusqu'à quelle distance peut se déplacer le centre de masses de l'ensemble avant que le pied de l'échelle ne glisse. La longueur de l'échelle est $L = 2{,}33\,m$. Le pied est à $1{,}2\,m$ du mur. Le coefficient de friction entre le pied de l'échelle et le sol est $\mu = 0{,}40$. On admet que le coefficient de friction avec le mur est zéro. Le poids de l'échelle est $m = 8\,kg$ et celui de la victime est $M = 70\,kg$. Calculez la hauteur des pieds de la victime quand l'accident commence.



R.N.: $0{,}823\,m$ du pied, soit $1{,}37\,m$ du sol.

11. GRAVITATION. MOUVEMENTS PLANÉTAIRES.

11.1 Un peu d'histoire.(1)

On connaît Pythagore surtout par son théorème dont, ironie du sort, il ne fit, probablement pas, la démonstration. Au $6^{ème}$ siècle avant J.C. il fut le gourou d'une espèce de secte à Crotone (au sud de l'Italie). Il découvrit le rapport entre la longueur d'une corde et la note obtenue (pour une même tension de la corde). Ainsi, les cordes dont le rapport de longueur est une fraction simple donnent des sons "harmonieux". En extrapolant il lança l'affirmation que tout l'univers répondait à l'"harmonie des sphères". La sphère centrale était, évidemment, la terre. Autour d'elle, des sphères concentriques contenaient le soleil, la lune, les planètes et les étoiles. Tout tournait sur des sphères. Cette affirmation gratuite allait devenir un dogme accepté par tous (ou presque) y compris l'église, pendant plus de 20 siècles, comme une Vérité indiscutable.

La terre était donc le centre de l'univers. Les étoiles tournaient à vitesse angulaire constante (un tour par jour sidéral). Par contre la rotation des planètes était plus compliquée. Elles tournaient avec presque la même vitesse mais pas exactement. Parfois elles tournaient plus vite que les étoiles et parfois plus lentement. Elles ne pouvaient être fixes sur leur sphère. Pour concilier leur mouvement compliqué avec l'"harmonie des sphères" on imagina qu'elles tournaient sur un cercle dont le centre tournait, lui-même, sur un autre cercle centré sur la terre. La trajectoire des planètes était une *épicycloïde*. Ce modèle est le modèle géocentrique de Ptolémée(2). Le modèle de Ptolémée était très compliqué et surtout ne pouvait pas expliquer les mesures de plus en plus précises faites notamment par l'astronome Tycho Brahé(3). On essaya de le rafistoler en rajoutant des nouvelles épicycloïdes (un cercle qui tourne sur un cercle qui tourne sur un cercle, etc.) sans grand succès.

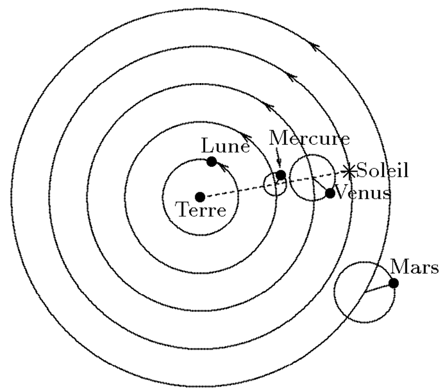


Figure 11.1 Modèle géocentrique de Ptolémée. Tous les objets célestes tournent une fois par jour autour de la terre. Pour tenir compte du déplacement des planètes par rapport aux étoiles, on fait tourner chaque planète autour d'un cercle dont le centre tourne une fois par jour autour de la terre.

Les observations astronomiques de Copernic(4) étaient beaucoup moins précises que celles de Tycho Brahé, mais suffisamment pour le convaincre que des épicycloïdes supplémentaires ne suffisaient pas à compenser l'excentricité de l'orbite de mars. Il trouva que le modèle héliocentrique (avec le soleil au centre) et les planètes lui tournant autour expliquait mieux les observations. Il écrivit un traité le décrivant mais, comme il était chanoine, il était bien placé pour savoir que l'héliocentrisme était une hérésie et qu'il aurait des problèmes avec l'inquisition s'il publiait son

(1) Je vous conseille le livre "Les somnambules" du grand journaliste, écrivain et aventurier d'origine hongroise Arthur Kœsler.

(2) Claude Ptolémée. Astronome grec du $2^{ème}$ siècle Apr. J.C. Né en Haute-Égypte. Auteur de l'Almageste et d'une Géographie qui a fait autorité pendant le Moyen Âge et la Renaissance.

(3) Tycho Brahé. Astronome danois né à Knudstrup (1546-1601). Il fut le dernier grand astronome à faire des observations sans télescope.

(4) Nicolas Copernic. Astronome polonais, né à Toruń (1473-1543). Sur son lit de mort publia son célèbre traité "De revolucionibus orbium cœlestium" décrivant le système solaire héliocentrique avec la terre et les planètes tournant sur elles-mêmes et autour du soleil.

traité. Il finit par le publier sur son lit de mort et après avoir bien dit que l'héliocentrisme n'était qu'un artifice qui facilitait le calcul, et que la terre était bien, comme le soutenait l'église, le centre de l'univers.

Kepler([5]) avait été assistant de Tycho Brahé. Il analysa les données de Tycho Brahé (et notamment les anomalies de l'orbite de mars) pendant vingt ans et finit par trouver des régularités dans les mouvements des planètes. Ces régularités sont connues comme les **Lois de Kepler du mouvement des planètes:**

1.- **Loi des orbites:** Toutes les planètes circulent dans des orbites elliptiques ayant le soleil dans un des foyers.

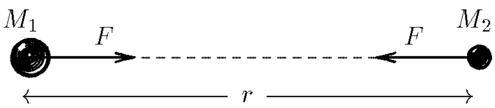
2.- **Loi des surfaces:** Une ligne joignant la planète au soleil balaye des surfaces égales dans des temps égaux.

3.- **Loi des périodes:** Le carré de la période orbitale d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube de la distance moyenne de la planète au soleil.

Les lois de Kepler appuyèrent la théorie de Copernic. Elles montraient la grande simplicité avec laquelle on peut décrire le mouvement des planètes. Mais ces lois décrivaient seulement les observations sans aucune interprétation théorique. Il faut attendre Newton pour avoir une interprétation théorique. Et le triomphe de la théorie d'attraction universelle de Newton est que les lois de Kepler se déduisent de la théorie.

11.2 Loi d'attraction universelle de Newton.

Deux particules de masses m_1 et m_2 situées à une distance r s'attirent avec une force F, colinéaire avec la droite qui joint les particules, de valeur:



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{11.1}$$

Où G est la **constante de gravitation universelle** *qui a la même valeur pour toutes les paires de particules.*

Il est intéressant de noter que les forces agissant sur les deux particules forment une paire action-réaction. Les deux forces sont égales, de signe opposée et colinéaires.

La force d'attraction gravitationnelle est indépendante du vide ou des obstacles qui peuvent se trouver entre les particules. Elle se propage à des distances intergalactiques. La vitesse de propagation de l'attraction de gravité n'a pas encore été mesurée mais on suppute qu'elle se propage à la vitesse de la lumière (pour ne pas faire de la peine à M. Einstein).

Il ne faut pas confondre la constante universelle G avec l'accélération de gravité $\mathbf{g}$.

L'équation 11.1 décrit la force entre particules. La force entre des objets étendus doit être calculée en décomposant chaque corps en particules et additionnant (vectoriellement) les forces entre paires de particules. On peut montrer que, dans le cas où les objets sont des sphères uniformes, on peut faire le calcul en considérant que toute la masse de chaque sphère se trouve dans le centre de masses de chaque sphère.

Mesurer la constante G est très délicat car il faut mesurer les forces entre deux objets dont on doit pouvoir changer la position. Les forces sont extrêmement faibles comparées au poids des

([5]) Johannes Kepler. Astronome allemand, né à Weil (dans le Wurtemberg) (1571-1630). Il énonça les lois connues comme "lois de Kepler" d'où Newton sut dégager la loi d'attraction universelle.

objets. La première mesure de la constante G fut faite par Cavendish en 1798. Il utilisa la balance de torsion([6]) inventée par Coulomb. La valeur actuelle de G est:

$$\textbf{Constante de gravitation universelle } G = 6{,}6742 \pm 0{,}0010\, 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

11.2.1 Force gravitationnelle d'une distribution sphérique de masses.

Nous allons calculer la force gravitationnelle exercée par une distribution sphérique uniforme de masses. Avant nous calculerons la force exercée par une mince coquille sphérique d'épaisseur ε. Et encore avant cela, nous calculerons la force exercée par un anneau étroit de la coquille. L'anneau sera symétrique par rapport à l'axe qui relie la masse M_1 au centre de la sphère. Ceci fait que toutes les particules de l'anneau se trouvent à la même distance de la masse M_1.

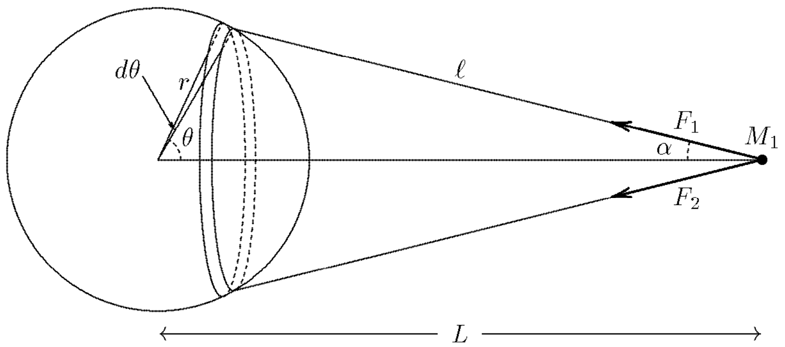


Figure 11.2 L'attraction de chaque particule de l'anneau, additionnée avec celle de la particule opposée donnent une résultante dirigée vers le centre de la sphère.

Chaque particule exerce une force sur M_1 qui peut être décomposée en une composante parallèle à la droite qui relie M_1 au centre de la sphère et une autre perpendiculaire à cette droite. La composante perpendiculaire due à chaque particule s'annule avec celle de la particule de l'anneau diamétralement opposée. De sorte que les seules composantes qui restent sont les composantes longitudinales. Celles-ci étant parallèles, on peut les additionner directement. De plus, on obtient la composante longitudinale en multipliant la force exercée par la particule par $\cos\alpha$. La force totale exercée par l'anneau sera donc la même que si toute la masse de l'anneau se trouvait à distance ℓ de M_1 mais sans oublier de multiplier par $\cos\alpha$.

$$F_{anneau} = G\frac{M_1 M_{anneau}}{\ell^2}\cos\alpha$$

Le volume de l'anneau est égal à sa longueur par sa largeur par son épaisseur (n'oubliez pas qu'il est très mince et très étroit). Si la densité du matériau de l'anneau est ρ, la longueur de l'anneau est $2\pi r\sin\theta$. Sa largeur est $r\,d\theta$ et son épaisseur est ε.

La masse de l'anneau sera:

$$M_{anneau} = \rho V = \rho 2\pi r \sin\theta\, r\, d\theta\, \varepsilon$$

Cette masse est évidemment différentielle, puisque la largeur est différentielle. On corrige:

$$dM = \rho\varepsilon 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$$

La force exercée sur la masse M_1 sera aussi différentielle:

$$dF = G\frac{M_1 dM}{\ell^2} = G\frac{M_1\rho\varepsilon 2\pi r^2\sin\theta\, d\theta}{\ell^2}\cos\alpha \tag{11.2}$$

([6]) Les anglo-saxons appellent, à tort, cette balance, “balance de Cavendish”.

Pour calculer la force totale il faut faire la somme de tous les anneaux sur la coquille. Dans l'expression précédente les variables α, θ et ℓ sont dépendantes. Pour pouvoir intégrer, il faut transformer l'expression pour la mettre en fonction d'une seule variable. La plus commode est ℓ. Dans la figure on voit que:

$$\cos\alpha = \frac{L - r\cos\theta}{\ell} \tag{11.3}$$

Le théorème du cosinus (ou théorème de Pythagore généralisé) nous dit:

$$\ell^2 = r^2 + L^2 - 2rL\cos\theta \tag{11.4}$$

$$r\cos\theta = \frac{r^2 + L^2 - \ell^2}{2L} \tag{11.5}$$

En différenciant l'équation 11.5 nous obtenons:

$$\sin\theta\, d\theta = \frac{\ell}{rL} d\ell \tag{11.6}$$

En remplaçant l'équation 11.5 dans l'équation 11.3:

$$\cos\alpha = \frac{L - \frac{r^2+L^2-\ell^2}{2L}}{\ell} = \frac{L^2 - r^2 + \ell^2}{2L\ell}$$

puis on remplace cette valeur ainsi que l'équation 11.6 dans l'équation 11.2:

$$dF = G\frac{M_1 dM}{\ell^2} = G\frac{M_1\rho\varepsilon 2\pi r^2 \frac{\ell}{rL} d\ell}{\ell^2}\frac{L^2 - r^2 + \ell^2}{2L\ell} = \frac{GM_1\rho\varepsilon\pi r}{L^2}\left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1\right) d\ell$$

Pour faire la somme sur tous les anneaux il faut que ℓ varie entre $L - r$ et $L + r$. Intégrons la partie variable:

$$\int_{L-r}^{L+r}\left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1\right) d\ell = \left(L^2 - r^2\right)\left(\frac{1}{L - r} - \frac{1}{L + r}\right) + 2r = \left(L^2 - r^2\right)\left(\frac{L + r - L + r}{L^2 - r^2}\right) + 2r = 4r$$

Le force totale sera:

$$F = \frac{GM_1\rho\varepsilon 4\pi r^2}{L^2}$$

Mais $4\pi r^2$ est la surface de la coquille, ε est son épaisseur et ρ sa densité. Le produit des trois est la masse m de la coquille:

$$F = \frac{GM_1 m}{L^2}$$

La force d'attraction entre la masse M_1 et la coquille est la même que si toute la masse de la coquille se trouvait concentrée au centre de la coquille.

On peut considérer une sphère comme formée par des coquilles concentriques. La force d'attraction entre la sphère et une masse ponctuelle est la somme des forces d'attraction de chaque coquille. Elle est donc la même que si toute la masse de la sphère se trouvait concentrée au centre de la sphère. On peut remarquer que ce résultat est valable même si les coquilles ont des densités différentes. Par exemple, les coquilles plus internes peuvent être plus denses que les externes (comme c'est le cas pour la terre). La seule condition à respecter est que chaque coquille sphérique ait une densité uniforme.

On obtient un résultat amusant quand on fait le même calcul quand la masse M_1 est située à l'intérieur de la coquille. Le calcul est le même sauf que les limites de l'intégrale changent: cette fois ℓ doit varier entre $r - L$ et $L + r$:

$$\int_{r-L}^{L+r}\left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1\right) d\ell = \left(L^2 - r^2\right)\left(\frac{1}{r - L} - \frac{1}{L + r}\right) + 2L = \left(L^2 - r^2\right)\left(\frac{L + r - r + L}{r^2 - L^2}\right) + 2L = 0$$

Donc, les forces sur une masse à l'intérieur de la coquille s'annulent. Le résultat est valable aussi si la coquille est épaisse car on peut l'imaginer comme formée par une infinitude de coquilles minces.

La raison de ce résultat n'est pas une raison mathématique mais une raison physique. Les masses de la coquille qui se trouvent alignées avec la masse M_1 à l'intérieur exercent des forces inversement proportionnelles à leur distance à la masse M_1. Mais pour un même *angle solide* la quantité de masse de la coquille augmente avec le carré de la distance. En conséquence l'augmentation de la distance est compensée par l'augmentation de masses et les forces de masses en opposition se compensent exactement. Ce résultat est valable pour toutes les forces qui diminuent avec le carré de la distance et, notamment, pour l'attraction électrostatique.

La force d'attraction qu'une masse sphérique de rayon R exerce sur une particule de masse située à une distance $r < R$ *(à l'intérieur)* de la sphère, est égale à celle qu'exerce la sphère de rayon r. Tout le reste de la sphère, la partie située entre r et R est une coquille épaisse dont les forces sur la particule à son intérieur s'annulent.

11.2.2 Masse de la terre et variations de g.

Après la mesure de la constante de gravitation universelle, les gens dirent que Cavendish était la première personne à avoir "pesé la terre". La raison est qu'une fois G connue on peut déduire immédiatement la masse de la terre. En effet, un objet de masse M placé sur la surface de la terre est attiré par la terre avec une force $F = Mg$. Mais cette force est égale à celle donnée par la loi de Newton:

$$Mg = G\frac{M_t M}{r^2}$$

où M_t est la masse de la terre et $r = 40\,000\,km/2\pi$ est son rayon.

$$M_t = \frac{gr^2}{G} = \frac{9{,}81\ \left(6{,}366\,10^6\right)^2}{6{,}67\,10^{-11}} = 5{,}96\,10^{24}kg$$

La valeur de l'accélération de gravité **g** n'est autre chose que:

$$g = \frac{GM_t}{r^2}$$

g varie avec la hauteur. Il diminue quand la hauteur augmente car r augmente. Il diminue aussi quand on est à l'intérieur de la terre (dans une galerie de mine, par exemple) car bien que r diminue, la masse de la sphère située à l'intérieur de r diminue encore plus vite.

g varie aussi avec la latitude, et ceci pour deux raisons. La première est que comme la terre est aplatie aux pôles, le rayon est plus grand à l'équateur qu'aux pôles([7]). Donc **g** est plus petite à l'équateur qu'aux pôles. La deuxième raison est que, comme la terre tourne, la force centrifuge est plus grande à l'équateur (rayon de rotation plus grand) qu'aux pôles, où elle est nulle. La valeur de **g** au niveau de la mer passe de 9,7803 à l'équateur, à 9,8322 aux pôles.

ATTENTION.

Il ne faut pas confondre l'accélération de gravité réelle qui dépend de l'endroit où on se trouve, avec l'accélération de gravité standard $9{,}80665\,m/s^2$ utilisée dans la définition de la force en Newtons. Un Newton vaut toujours $1\,kg \cdot 9{,}80665\,m/s^2$ mais le nombre de Newtons nécessaires pour soulever une masse d'un kilogramme dépend de l'endroit où l'on se trouve.

([7]) La différence entre le rayon à l'équateur et le rayon aux pôles est de 22 km.

11.3 Champ gravitationnel.

On peut voir l'attraction que deux masses exercent l'une sur l'autre comme une interaction entre paires de particules. Une autre façon de la voir est de dire qu'une masse modifie l'espace autour d'elle en créant un **champ gravitationnel**. Ce champ agit sur toute autre particule de masse en exerçant une force sur elle. Ce sont deux façons de voir une même réalité physique et le résultat est, évidemment, le même. Mais dans beaucoup de cas (autres que la gravitation) l'utilisation du concept de champ est presque indispensable pour traiter certains problèmes.

Imaginons la terre comme une masse isolée. Toute masse m autour de la terre subit une force d'attraction F:

$$F = \frac{GM_t}{r^2}m$$

cette force est dirigée vers le centre de la terre. Comme la force est dirigée alors que la masse m est un scalaire (=n'est pas un vecteur), c'est le champ gravitationnel qui est vectoriel (c'est le champ qui impose une direction). Si nous appelons $\vec{r}$ le vecteur qui va du centre de la terre à la position de la masse m, on peut écrire:

$$\vec{F} = -\frac{GM_t}{r^3}\vec{r}m$$

Remarquez que l'exposant de r au dénominateur est passé à 3 pour que la dépendance avec r ne change pas. De plus il faut ajouter un signe négatif pour obtenir une force dirigée dans la direction opposée de celle du vecteur $\vec{r}$. Ceci nous permet d'écrire le champ gravitationnel de la terre comme:

$$\vec{\Gamma} = -\frac{GM_t}{r^3}\vec{r}$$

Les unités du champ $\vec{\Gamma}$ sont les mêmes que celles de l'accélération de gravité, c'est-à-dire celles d'une accélération: $mètres/seconde^2$.

Toute masse m plongée dans ce champ subira une force:

$$\vec{F} = \vec{\Gamma}m$$

Au niveau de la mer le champ $\vec{\Gamma}$ est un vecteur vertical, dirigé vers le bas et de valeur $g = 9{,}81\, m/s^2$.

11.3.1 Énergie potentielle gravitationnelle.

Nous avions déjà calculé l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet situé près de la surface de la terre, là où l'accélération de gravité pouvait être considérée comme constante. Nous savons maintenant que l'accélération de gravité diminue avec la distance et nous allons refaire le calcul qui sera, cette fois, valable pour toutes les distances.

Lors du calcul précédent, nous avions pris comme zéro d'énergie potentielle, la hauteur zéro de l'objet (sans trop insister sur l'endroit où se trouvait cette hauteur zéro) et nous avions obtenu que l'énergie potentielle était $E_p = mgh$. En réalité nous ne pouvons calculer que des différences d'énergie potentielle d'un objet pour deux positions différentes. Fixer un zéro d'énergie à une position donnée est purement arbitraire mais très commode.

Dans le cas des forces attractives qui diminuent avec la distance, il est habituel de fixer le zéro d'énergie potentielle à l'infini. C'est-à-dire, à l'endroit où la force attractive est nulle. La conséquence de ce choix est que l'énergie potentielle gravitationnelle est toujours négative. En effet, l'énergie potentielle est l'énergie qu'un objet peut potentiellement *fournir*. Or un objet situé à l'infini fournit de l'énergie en se rapprochant et son énergie potentielle diminue (et donc devient de plus en plus négative). Il ne faut donc pas être troublé par des énergies potentielles négatives: ce n'est que le résultat du choix du niveau zéro.

Pour calculer l'énergie potentielle d'un objet à un endroit donné il faut calculer le travail à fournir pour le porter de cet endroit à l'endroit où son énergie est nulle, c'est-à-dire l'infini. Donc pour un objet de masse m situé à une distance r d'une masse M, le travail à fournir pour le porter à l'infini est:

$$E_p = \int_r^\infty F\,dr = \int_r^\infty \frac{GMm}{r^2}\,dr = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = -\frac{GMm}{r} \qquad (11.7)$$

On peut se demander quel est le chemin utilisé pour porter la masse m à l'infini. En regardant le calcul on pourrait penser que le chemin utilisé est le rayon qui passait par la position initiale. En fait, le chemin n'a aucune importance. Le travail est égal au produit du déplacement par la composante de la force dans la direction du déplacement ou à l'inverse: le produit de la force par le déplacement dans la direction de la force. Dans notre cas, la force est radiale et donc les seuls déplacements qui impliquent du travail sont les déplacement radiaux. Le travail pour déplacer un objet entre deux points ne dépend pas du chemin. Les forces et les champs de forces de ce type, dans lequel le travail ne dépend pas du chemin, reçoivent le nom de **forces conservatives**. Le travail fait pour faire un chemin fermé (qui revient au point de départ) est nul: l'énergie potentielle s'est conservée et n'a pas été transformée en un autre type d'énergie (chaleur, par exemple).

On peut calculer la force exercée sur une masse à partir de l'énergie potentielle. En utilisant la même méthode que nous avons utilisée dans le chapitre 5, nous pouvons écrire que le travail fait sur un objet contre les forces de gravité est égal à l'augmentation d'énergie potentielle de l'objet:

$$F\,dr = dE_p = \frac{dE_p}{dr}dr$$

$$F = \frac{d}{dr}\left(\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}$$

Le signe négatif indique que la force a le signe opposé à l'augmentation de r.

Si on aime travailler avec des champs, on peut définir un champ d'*énergie potentielle gravitationnelle par masse unitaire* V:

$$V = \frac{-\frac{GMm}{r}}{m} = -\frac{GM}{r}$$

Ce champ est un champ scalaire: ce n'est pas un vecteur. À chaque point de l'espace correspond une valeur et non trois comme pour le cas des champs vectoriels. L'énergie potentielle d'un objet de masse m se calcule en multipliant la valeur du champ à l'endroit de l'objet par la masse de l'objet.

L'énergie potentielle d'un objet de masse m à la surface de la terre est égale à $-\frac{GM_t}{r_t}m$. Pour porter cet objet à l'infini il faut fournir à l'objet une énergie égale à celle que l'on vient de calculer (mais positive!). Si on lui fournit cette vitesse sous la forme d'énergie cinétique la vitesse à lui fournir sera:

$$\tfrac{1}{2}mv_\circ^2 = \frac{GM_t}{r_t}m$$

$$v_\circ = \sqrt{\frac{2GM_t}{r_t}} = \sqrt{\frac{2\ 6{,}67\,10^{-11}5{,}96\,10^{24}}{6{,}366\,10^6}} = 11\,175,5\,m/s$$

soit $11\,km/s$. Si, de la terre, on lance un objet avec cette vitesse il arrivera à l'infini: c'est ce que l'on appelle **vitesse d'échappement**. Tout objet lancé avec une vitesse moindre finira par s'arrêter avant et retomber sur terre.

11.4 Mouvements planétaires.

Note: Dans la plupart des livres de physique du niveau de ce fascicule on ne fait pas la démonstration des lois de Kepler à partir des lois de Newton. Le calcul est, effectivement, un peu lourd. Je l'inclus quand même, mais je pense que je ne le ferai pas en cours. Vous pouvez quand-même lire rapidement ces paragraphes, jusqu'au 11.5 sans vous attarder dans les calculs, mais seulement dans les conclusions. Et reprendre en détail à partir du 11.5.

Les lois de Kepler nous disent que les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers. Le système de coordonnées cartésiennes que nous avons utilisé jusqu'ici n'est pas adapté pour décrire ce type de trajectoires. Il est plus facile d'utiliser des coordonnées polaires. Ainsi, nous allons faire une parenthèse pour en parler.

11.4.1 Coordonnées polaires.

Deux variables r et ϕ vont décrire la position d'un point. r est la distance entre l'origine des coordonnées et le point. ϕ est l'angle formé par r avec une direction fixe. La position d'un point est complètement déterminée par la paire (r, ϕ) de la même façon qu'elle l'était par la paire (x, y) dans les coordonnées cartésiennes. Nous choisissons deux vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\phi$ mutuellement perpendiculaires qui ont pour direction celle de l'augmentation de $\vec{r}$ et sa perpendiculaire respectivement. Contrairement aux vecteurs unitaires utilisés en coordonnées cartésiennes qui gardaient toujours leur orientation ici, les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\phi$ changent en permanence de direction. De plus il faut une paire de vecteurs unitaires pour chaque objet décrit.

La dérivée d'un vecteur unitaire est perpendiculaire à celui-ci car un vecteur unitaire ne peut changer qu'en direction, pas en longueur. La variation de $\vec{u}_r$ a la direction de $\vec{u}_\phi$ (voir dessin) et sa longueur est égale à $d\phi|\vec{u}_r| = d\phi$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\phi \frac{d\phi}{dt}$$

De même, la variation de u_ϕ a la direction de $-\vec{u}_r$ et sa valeur est $d\phi$:

$$\frac{d\vec{u}_\phi}{dt} = -\vec{u}_r \frac{d\phi}{dt}$$

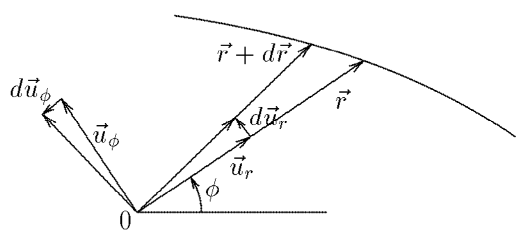


Figure 11.3 Coordonnées polaires. La position d'un point est déterminée par r et ϕ. Les variations de chaque vecteur unitaire sont parallèles à l'autre vecteur unitaire.

En dérivant l'expression $\vec{r} = r\vec{u}_r$ nous obtenons la vitesse:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_\phi \tag{11.8}$$

La vitesse est le résultat de l'addition de deux vecteurs perpendiculaires (parallèles aux deux vecteurs unitaires). Les trois vecteurs forment un triangle rectangle dont hypoténuse est la vitesse. En utilisant le théorème de Pythagore on peut calculer le carré de la vitesse dont nous aurons besoin plus tard:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{11.9}$$

En dérivant l'expression vectorielle de la vitesse nous obtenons l'accélération:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\vec{u}_\phi + \frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt}\vec{u}_\phi + \frac{d\phi}{dt}r\frac{d\vec{u}_\phi}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\vec{u}_\phi\frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\vec{u}_\phi + \frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt}\vec{u}_\phi - \frac{d\phi}{dt}r\vec{u}_r\frac{d\phi}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r + \left(r\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt}\right)\vec{u}_\phi$$

Donc:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$
$$a_\phi = r\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt}$$

11.4.2 Loi des surfaces.

Étudions le mouvement d'un corps de masse m qui subit une force dirigée vers l'origine des coordonnées (comme c'est le cas pour une planète qui est attirée par le soleil).

La seconde loi du mouvement de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ s'exprime, en coordonnées polaires, comme:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Si nous faisons le produit vectoriel de chaque coté par le vecteur $\vec{r}$ nous obtenons:

$$\vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$$

égal à zéro car le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul, et la force est colinéaire avec le rayon. Comme la masse n'est pas nulle nous pouvons diviser par m:

$$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$$

L'intégrale de cette équation est:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{c}$$

Où $\vec{c}$ est un vecteur constant. En effet, si l'on dérive([8]) cette expression on obtient la précédente:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$$

car le tout premier terme est nul car c'est le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles.

L'expression:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{c} \qquad (11.10)$$

a une signification géométrique simple. Dans le dessin de droite de la figure 11.4 nous avons représenté deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. La surface du triangle en traits pleins est:

$$S = \tfrac{1}{2}a\,h = \tfrac{1}{2}a\,b\,\sin\theta = \tfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

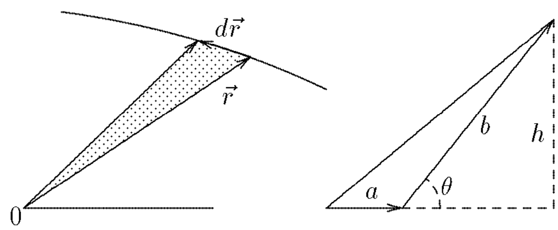


Figure 11.4 La surface grisée est égale à la moitié du module du produit vectoriel $\vec{r} \times d\vec{r}$.

Donc le module du produit vectoriel $\vec{r} \times d\vec{r}$ est égal au double de la surface grisée dans le dessin de gauche de la figure 11.4. Cette surface est la surface balayée par le rayon quand la masse avance de $d\vec{r}$. Si nous divisons cette surface par le temps dt mis pour la balayer nous obtenons:

$$\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = 2c \qquad (11.11)$$

([8]) On rappelle qu'un produit vectoriel de vecteurs se dérive de la même façon qu'un produit de scalaires mais que l'on doit respecter l'ordre des facteurs.

où c est la "vitesse surfacique" (berk!) qui est constante. Ceci est la deuxième loi de Kepler et est une conséquence de la force d'attraction centrale. Remarquez que nous n'avons pas eu besoin de la dépendance de la force avec la distance. Même un pendule "conique" (une ficelle avec un poids) dont la force est à peu près linéaire suit la loi des surfaces de Kepler.

Le vecteur $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ est le moment cinétique (ou moment angulaire) de la masse en orbite autour de 0. Corollaire: dans un mouvement à force centrale le moment cinétique d'une particule par rapport au centre de forces reste constant.

11.4.3 Trajectoire des planètes.

Pour calculer la trajectoire d'une planète (ou une masse qui orbite autour d'une masse fixe) nous allons utiliser la loi des surfaces et la conservation de l'énergie. Pour l'énergie nous savons que la somme de l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle est constante. L'énergie cinétique est $\frac{1}{2}mv^2$ et l'énergie potentielle est (équation 11.7):

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

où M est la masse fixe (soleil, par exemple), m est la masse de l'objet qui bouge, et r est la distance. Nous pouvons écrire:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \tfrac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{r_o}$$

où v_o et r_o sont des valeurs de v et r à un endroit déterminé.

Pour avoir la position de l'objet en fonction du temps il faudrait résoudre ce système d'équations différentielles. Nous allons calculer la forme de la trajectoire (r en fonction de ϕ). Pour cela il faut éliminer le temps des deux équations. Or, le temps n'apparaît que dans les dérivées. Nous pourrons l'éliminer grâce à cette astuce:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi}$$

On peut obtenir la valeur de $\frac{d\phi}{dt}$ à partir de la loi des surfaces (équations 11.10 et 11.11):

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{c}$$

Dans cette équation nous pouvons remplacer la vitesse $\frac{d\vec{r}}{dt}$ par sa valeur dans l'équation 11.8:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_\phi\right) = \frac{dr}{dt}\vec{r} \times \vec{u}_r + r\frac{d\phi}{dt}\vec{r} \times \vec{u}_\phi = 2\vec{c}$$

Le produit vectoriel $\vec{r} \times \vec{u}_r$ est nul car les deux vecteurs sont parallèles. Par contre le produit vectoriel $\vec{r} \times \vec{u}_\phi$ n'est pas nul et son module est r car les deux vecteurs sont perpendiculaires et le module de $\vec{u}_\phi$ est 1. En prenant le module des deux côtés de la dernière égalité:

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = 2c$$

d'où:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2c}{r^2}$$

et

$$\frac{d}{dt} = \frac{2c}{r^2}\frac{d}{d\phi}$$

Nous pouvons maintenant revenir à la conservation de l'énergie et remplacer v^2 par son expression donnée par l'équation 11.9:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \tfrac{1}{2}mv_\circ^2 - \frac{GMm}{r_\circ}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - 2\frac{GM}{r} = v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}$$

On remplace $\frac{dr}{dt}$ par $\frac{2c}{r^2}\frac{dr}{d\phi}$ et $\frac{d\phi}{dt}$ par $\frac{2c}{r^2}$

$$\left(\frac{2c}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2\left(\frac{2c}{r^2}\right)^2 - 2\frac{GM}{r} = v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}$$

$$\frac{4c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{4c^2}{r^2} - 2\frac{GM}{r} = v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}$$

On peut sortir $d\phi$:

$$d\phi = \frac{2c\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ} + \frac{2GM}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}}$$

On fait le changement de variable $q = \frac{1}{r}$, (ce qui donne $dq = -\frac{dr}{r^2}$):

$$d\phi = -\frac{2c\,dq}{\sqrt{v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ} + 2GMq - 4c^2q^2}}$$

Ce qui donne:

$$\phi + C = -\int \frac{2c\,dq}{\sqrt{v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ} + 2GMq - 4c^2q^2}}$$

On trouve la primitive de cette intégrale dans les tables:

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - hx^2}} = \frac{1}{\sqrt{h}}\arccos\left(\frac{b - hx}{\sqrt{b^2 + ah}}\right)$$

on identifie:

$$a = v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ} \qquad b = GM \qquad h = 4c^2$$

$$\phi + C = 2c\frac{1}{2c}\arccos\left(\frac{GM - 4c^2q}{\sqrt{G^2M^2 + 4c^2\left(v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}\right)}}\right)$$

$$GM - \frac{4c^2}{r} = \sqrt{G^2M^2 + 4c^2\left(v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}\right)}\ \cos(\phi + C)$$

$$r = \frac{\frac{4c^2}{GM}}{1 - \frac{1}{GM}\sqrt{G^2M^2 + 4c^2\left(v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}\right)}\ \cos(\phi + C)}$$

Cette équation est de la forme:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\phi + C_1)}$$

qui est connue car c'est l'équation d'une courbe **conique** (ellipse, parabole ou hyperbole) en coordonnées polaires. Pour $\epsilon = 0$ on a le cas particulier d'un cercle (=une ellipse non aplatie) car r est constante. Si $|\epsilon| < 1$ on a une ellipse. Pour $|\epsilon| = 1$ une parabole, et une hyperbole si $|\epsilon| > 1$.

Dans le cas d'une ellipse le dénominateur reste toujours positif et r oscille entre deux valeurs positives. La condition pour une ellipse est:

$$\frac{1}{GM}\sqrt{G^2M^2 + 4c^2\left(v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}\right)} < 1$$

$$G^2M^2 + 4c^2\left(v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0}\right) < G^2M^2$$

$$v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0} < 0$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM}{r_0} < 0$$

Mais ceci est l'énergie totale de l'objet. Donc, quand l'énergie totale est négative la trajectoire est une ellipse.

Si $|\epsilon| = 1$ on obtient

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM}{r_0} = 0$$

la trajectoire est une parabole et l'objet peut arriver à l'infini (dans un temps infini) puisqu'il a tout juste l'énergie nécessaire. Dans l'expression de r le dénominateur devient nul pour la valeur de ϕ qui rend le cosinus égal à 1.

Si $|\epsilon| > 1$ on obtient

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM}{r_0} > 0$$

L'énergie totale est positive. La trajectoire est une hyperbole. L'objet peut arriver à l'infini avec une vitesse non nulle. Dans l'expression de r le dénominateur devient nul pour deux valeurs de l'angle pour lesquels $\cos(\phi + C_1) = -1/\epsilon$.

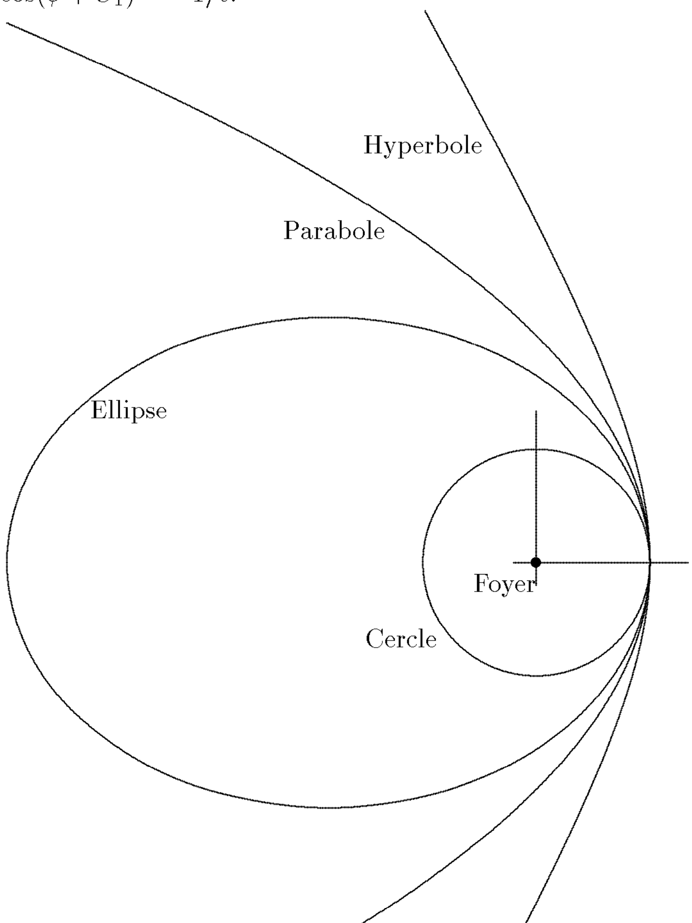


Figure 11.5 Quelques coniques avec un même foyer. Les asymptotes de la parabole sont horizontales. Celles de l'hyperbole forment un angle de 120° avec l'axe horizontal.

Dans le système solaire, l'orbite des planètes est elliptique. C'est le cas aussi pour des comètes récurrentes (qui reviennent périodiquement). Par contre les objets externes au système solaire qui nous visitent un seule fois ont une énergie positive et quand ils s'éloignent c'est pour toujours.

11.4.4 Période des planètes.

Dans le cas des trajectoires elliptiques on peut calculer la période de révolution. Pour ceci il suffit de diviser la surface de l'ellipse par la "vitesse surfacique" c.

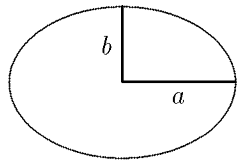


Figure 11.6 Demi-axe majeur a et demi-axe mineur b d'une ellipse.

La surface d'une ellipse est égale à $S = \pi ab$, où a est le demi-axe majeur et b le demi-axe mineur (ceci correspond à un cercle de rayon a aplati d'un rapport b/a dans une direction). Il faut relier a et b aux valeurs p et ϵ de la formule en coordonnées polaires. On peut vérifier que:

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$
$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2}$$

$$1-\epsilon^2 = \frac{p}{a} = \frac{4c^2}{GMa} \tag{11.12}$$

Comme c est la "vitesse surfacique", la surface de la trajectoire sera égale à c multipliée par la période T de la planète:

$$cT = \pi\, a\, b = \pi\, a^2\sqrt{1-\epsilon^2} = \frac{2\pi\, a^2 c}{\sqrt{GMa}}$$

En divisant par c:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

Ceci est la troisième loi de Kepler (loi des périodes): *Le carré de la période orbitale d'une planète autour du soleil est proportionnelle au cube de la distance moyenne de la planète au soleil.*

11.4.5 Énergie totale d'une planète.

Si, dans l'équation 11.12, nous remplaçons ϵ par sa valeur:

$$\frac{4c^2}{GMa} = 1-\epsilon^2 = 1 - \frac{1}{G^2M^2}\left(G^2M^2 + 4c^2\left(v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}\right)\right)$$

$$\frac{4c^2}{GMa} = -\frac{4c^2}{G^2M^2}\left(v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ}\right)$$

$$v_\circ^2 - 2\frac{GM}{r_\circ} = -\frac{GM}{a}$$

On multiplie par $\frac{1}{2}m$ pour obtenir l'énergie:

$$\tfrac{1}{2}mv_\circ^2 - \frac{GMm}{r_\circ} = -\tfrac{1}{2}\frac{GMm}{a}$$

Le terme de gauche est l'énergie de la planète. Le terme de droite est bien négatif car toutes les variables sont positives. Ce qui est intéressant dans ce résultat est que l'énergie ne dépend que de l'axe majeur de l'ellipse et non du mineur. Toutes les ellipses (y compris le cercle) qui ont le même axe majeur correspondent à une même énergie. Mais ces ellipses qui ont le même axe majeur ne sont pas tangentes. Elles ont toutes le même foyer dont la position dans l'ellipse dépend de l'aplatissement. Les centres de ces ellipses ne coïncident pas.

11.5 Trajectoires circulaires.

Le cas particulier des orbites avec excentricité ϵ égale à zéro est particulièrement simple et peut être calculé directement sans passer par les calculs des paragraphes précédents.

Une masse M est située au centre de la trajectoire circulaire de rayon r d'une particule de masse m. La force F d'attraction est dirigée vers le centre et est toujours perpendiculaire à la trajectoire de la particule. Elle ne change pas le module de la vitesse tangentielle V_T de la particule. L'énergie de la particule reste donc constante.

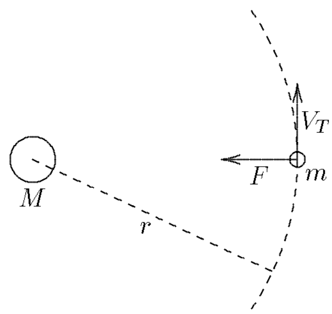


Figure 11.7 Un objet de masse m décrit une orbite circulaire autour de la masse M. La vitesse tangentielle reste constante.

La force F est la force centripète qui détermine la trajectoire. Nous avons vu (paragraphe 4.2) que:

$$F = m\frac{V_T^2}{r}$$

Mais la force F est aussi la force d'attraction gravitationnelle:

$$F = G\frac{M\,m}{r^2}$$

donc:

$$m\frac{V_T^2}{r} = G\frac{M\,m}{r^2}$$

On déduit la vitesse tangentielle:

$$V_T = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

et la période orbitale T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Calculons la vitesse et la période d'un satellite terrestre situé dans une orbite à 300 km de hauteur. On peut chercher les valeurs de G et de la masse de la terre M dans une table (ou dans ce fascicule). Mais on peut les retrouver en sachant que, au niveau de la mer, le poids p d'une masse m est $p = mg$ et que ce même poids est égal à l'attraction gravitationnelle de la terre:

$$p = G\frac{M\,m}{r_\circ^2}$$

Où $r_\circ$ est le rayon de la terre, dont le périmètre est de 40 000 km (définition du mètre). On déduit:

$$GM = gr_\circ^2 = 9{,}81\left(\frac{4\,10^7}{2\pi}\right)^2 = 3{,}976\,10^{14}\,m^3s^{-2}$$

Le rayon de l'orbite du satellite sera $r = r_\circ + 3\,10^5 = 6{,}666\,10^6 m$ et sa vitesse tangentielle sera:

$$V_T = \sqrt{\frac{3{,}976\,10^{14}}{6{,}666\,10^6}} = 7723\,m/s$$

La période de l'orbite est:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}666\,10^6)^3}{3{,}976\,10^{14}}} = 5423\,s \simeq 90\ minutes$$

11.6 Mouvement de deux corps soumis à l'attraction de gravité.

Dans les paragraphes précédents nous avons considéré que la masse M située au centre de coordonnées était immobile. Ceci est une supposition qui est valable pour des mouvements des planètes autour du soleil. La masse des planètes est tellement petite devant celle du soleil que l'on peut considérer ce dernier comme fixe. Mais pour d'autres cas, comme celui de la terre et de la lune la supposition de l'immobilité de la terre n'est plus raisonnable. Nous savons que dans le système terre-lune aussi bien la lune que la terre tournent autour du centre de masses du système et que la distance entre le centre de la terre et le centre de masses du système est proche du rayon de la terre.

Malgré cela, les calculs (lourds!) des paragraphes précédents restent valables avec une petite modification que nous allons déduire.

Examinons les forces entre deux masses m_a et m_b comparables. Les deux masses sont à des distances a et b de leur centre de masses.

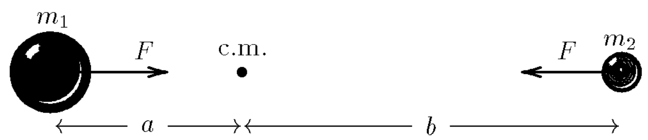


Figure 11.8 Les deux masses tournent autour du centre de masses du système.

La force entre les deux masses est:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{(a+b)^2}$$

Mais la définition du centre de masses nous dit que:

$$m_1 a = m_2 b$$

d'où

$$a = \frac{m_2}{m_1} b$$

En remplaçant a dans l'expression de la force:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)^2 b^2}$$

$$F = G\frac{\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2} m_2}{b^2}$$

C'est-à-dire, la force que subit la masse m_2 est la même que s'il y avait une masse $\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}$ fixe située au centre de masses.

Il est évident que la situation est symétrique et que la masse m_1 voit une masse fixe $\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}$ située au centre de masses.

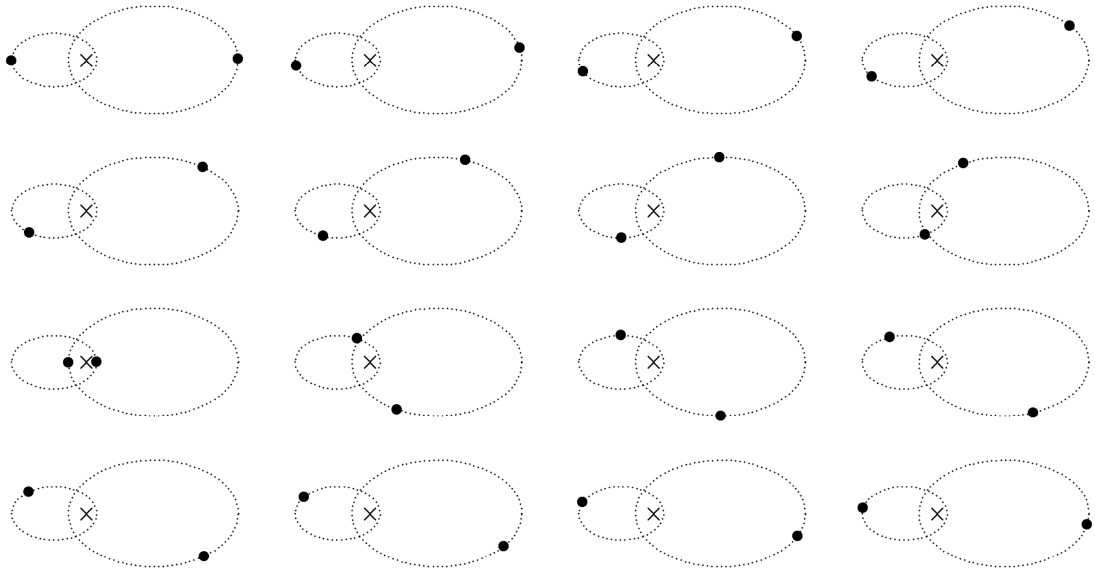


Figure 11.9 Positions successives prises par deux objets mutuellement attirés par leurs forces de gravitation. La masse de l'objet dans l'orbite de gauche est deux fois plus grande que celle de droite. Les dessins se lisent de gauche à droite puis de haut en bas. L'intervalle entre chaque dessin est d'un seizième de période. Remarquez comme les objets vont plus vite quand ils sont proches du centre de masses (représenté par un $\times$). Dans cet exemple les orbites sont elliptiques, mais elles auraient pu, aussi bien, être des cercles.

11.7 Mouvement de N corps soumis à l'attraction de gravité.

Ce problème est connu comme le "problème de n corps" ou "n-body problem". Il a fait l'objet de beaucoup de livres qui ne traitaient que de ce problème. Tout cela pour rien: on ne sait pas le résoudre analytiquement, sauf pour quelques cas particuliers. On sait écrire les équations différentielles correspondantes à $F = ma$ pour chacun des corps. Mais on ne sait pas intégrer analytiquement le système d'équations différentielles obtenu. On sait, évidemment, les intégrer numériquement comme le montre la précision avec laquelle on calcule la trajectoire des sondes spatiales ou la trajectoire des comètes. Mais la précision avec laquelle on calcule une trajectoire est limitée par la précision des calculateurs utilisés. Si on écrit un code qui permet de calculer avec plus de chiffres significatifs le calcul est plus lent. À mesure que la puissance de calcul des ordinateurs (je ne parle pas des PC!) augmente, on peut prédire avec plus de précision l'orbite des objets. Dernièrement ce problème a touché le grand public quand on a parlé de prédire les possibles collisions futures des astéroïdes avec la terre.

Malgré la limitation due au calcul numérique, on peut encore faire des merveilles dans les calculs, comme celles des astronomes Jean Le Verrier et John C. Adams qui, en 1846 (sans PCs ni calculettes), observant les anomalies de l'orbite de la planète Uranus, prédirent séparément l'existence d'une planète inconnue et calculèrent l'endroit du ciel vers lequel il fallait pointer les télescopes. On l'appela Neptune.

Quand on a une masse fixe (ou très grande) autour de laquelle orbite un corps, l'énergie de celui-ci reste constante. Quand il s'agit de deux corps, la situation est la même. Par contre quand il y a plus de deux corps, le jeu des forces et des orbites fait que de l'énergie passe d'un corps à l'autre. Un transfert d'énergie implique un changement d'orbite suivi d'un transfert d'énergie différent. . . et ainsi de suite.

Quand la masse centrale est fixe ou très grande par rapport aux planètes ou satellites, les transferts d'énergie se passent à travers les forces entre planètes. Par contre, si la masse centrale est plus petite, elle exécute une orbite complexe autour du centre de masses. Dans cette orbite complexe on trouve les périodes de toutes les planètes. Donc, chaque planète voit un "soleil" qui bouge tout le temps et qui peut, en moyenne, aussi bien lui fournir de l'énergie que lui en prendre. Certains planètes tombent vers des orbites de plus en plus proches du centre tandis que d'autres décrivent des orbites de plus en plus éloignées. Dans notre système solaire le soleil est assez massif et les grandes planètes assez éloignées de sorte que les orbites n'évoluent pas beaucoup. La preuve est que nous sommes encore là.

On trouve des phénomènes très surprenants dans des systèmes à n corps. Citons, sans en parler, les points Lagrangiens et les orbites réciproques. Deux autres phénomènes sont la capture et le "slingshot". Dans la capture, un corps extérieur au système solaire (avec énergie totale positive) passe à l'extérieur et devant une planète. Le fait de passer devant fait accélérer la planète et freiner l'objet extérieur. La planète prend une orbite plus énergétique, mais l'objet peut se retrouver avec une énergie négative et rester lié (en orbite) au système solaire. On pense que la planète Pluton a été capturée de cette manière.

Le phénomène inverse est le "slingshot" (effet de fronde). Cet effet fut découvert vers 1974 en faisant des simulations à l'ordinateur sur le mouvement de trois corps. Un objet (peu massif par rapport à la planète) la rattrape à l'intérieur et la dépasse. L'objet gagne de l'énergie au dépens de celle de la planète. On utilise cette méthode pour accélérer des sondes spatiales et leur donner des vitesses très difficiles à atteindre à partir des fusées de lancement. La sonde "Rosetta" utilisera trois passages près de la terre et un près de Mars pour atteindre la vitesse nécessaire pour atteindre l'orbite de la comète Churyumov-Gerasimenko([9]).

11.8 Le système solaire.

Il serait très esthétique que le système solaire soit formé par des planètes qui tournent autour du soleil sur des trajectoires circulaires contenues dans un même plan. Il n'en est rien! Les planètes tournent sur des trajectoires décentrées et non coplanaires. Mais les orbites ne sont pas très excentriques ni très éloignées du plan de l'écliptique. En regardant les données du système solaire on a l'impression que c'est un travail fait avec peu de soins ou peu d'habileté.

SYSTÈME SOLAIRE							
	Diamètre / 10^6 m	Masse / 10^{24} kg	Période de révolution autour du Soleil (jours)	Rayon moyen de l'orbite / 10^9m	Excentricité	Inclinaison de l'orbite par rapport à l'écliptique (degrés)	Inclinaison de son axe par rapport au plan de son orbite (degrés)
Soleil	1392	1986816	26-37	-	-	-	-
Mercure	4,88	0,3302	87,97	57,9	0,206	7	0,1
Venus	12,1	4,869	224,7	108	0,0068	3,39	177,3
Terre	12,73	5,97	365,25	150	0,0167	0	23,45
Mars	6,79	0,6419	686,98	227,9	0,0934	1,85	25,19
Jupiter	143	1898,6	4332,6	778	0,04839	1,305	3,12
Saturne	120,5	558,46	10759,22	1429	0,05415	2,484	26,73
Uranus	51,1	86,83	30685	2869,8	0,04718	0,77	97,86
Neptune	49,53	102,43	60189	4496,6	0,00859	1,77	29,56
Pluton	2,274	0,0125	90465	5910,6	0,2488	17,14	122,46
Lune	3,476	0,07349	27,322	0,384 (terre)	0,0549	5,145	6,68

Figure 11.10 Quelques données du système solaire. Pluton n'est probablement pas une planète comme les autres mais un objet de la ceinture de Kuiper capturé par les perturbations provoquées par les planètes géantes Jupiter et Saturne.

Les trois colonnes de droite donnent une idée de l'écart des planètes par rapport au système idéal d'orbites circulaires et "à plat". On peut voir à l'œil nu l'excentricité des orbites de Mercure et Mars (figure 11.11).

([9]) Consultez le site http://www.esa.int/export/SPECIALS/Rosetta

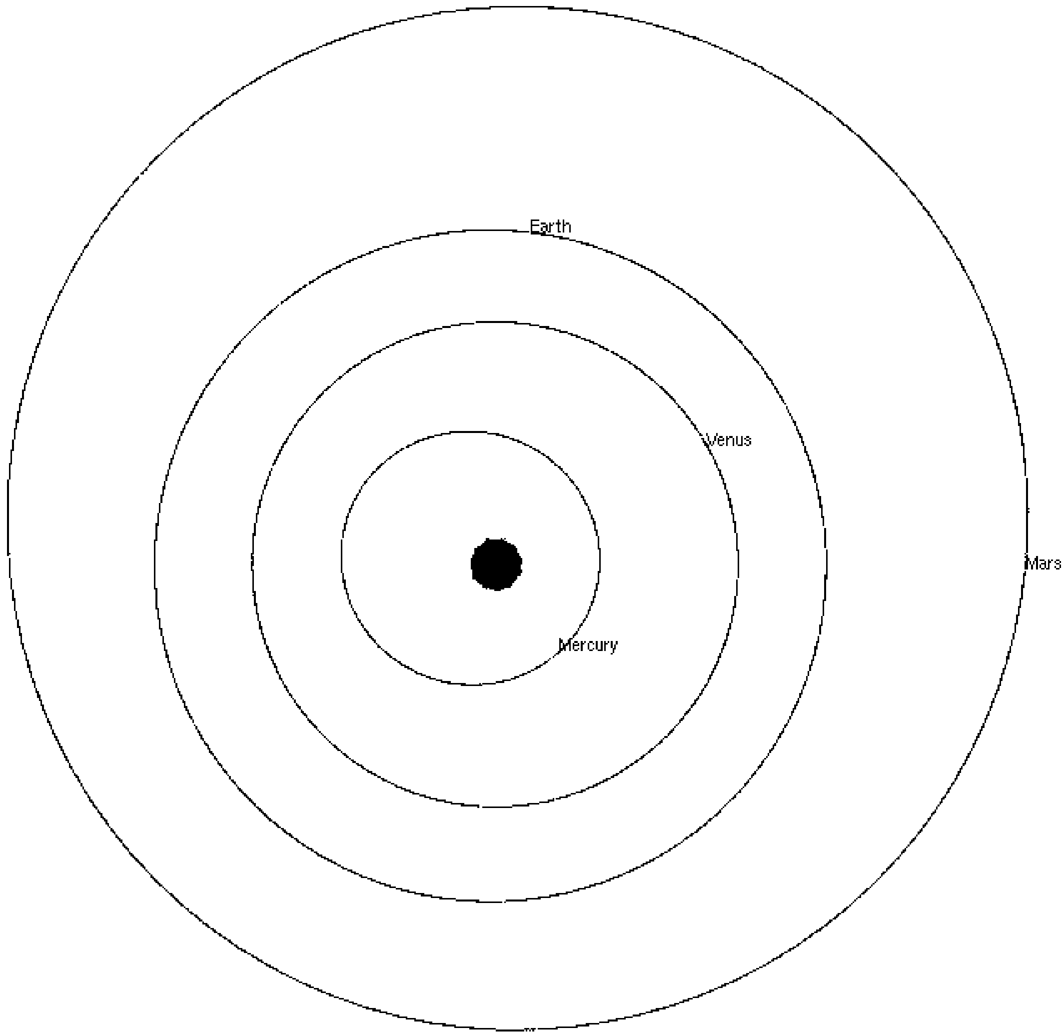


Figure 11.11 Orbites des 4 premières planètes le 14-03-2004 obtenues avec le logiciel libre Celestia([10]). Dans la transformation en noir et blanc les dessins des planètes ont été perdus. Elles se situaient près de leurs noms. Le soleil n'est pas à l'échelle. À l'échelle du dessin l'orbite de Neptune se situerait à 1,35 m.

Le plan qui contient l'orbite de la terre s'appelle **écliptique**. L'intersection de ce plan imaginaire avec le ciel donne une ligne qui est la trajectoire du soleil dans le ciel. L'axe de rotation de la terre n'est pas perpendiculaire à l'écliptique mais incliné de 23,45°. La prolongation de l'axe de rotation de la terre vers le nord touche le ciel dans un point proche de l'étoile polaire. Mais comme la terre suit un mouvement de précession (voir chapitre 9) l'actuelle étoile polaire ne sera plus polaire dans quelques centaines d'années et il faudra attendre 27000 ans pour qu'elle le redevienne.

L'orbite de la lune n'est pas réussie non plus. Elle ne tourne ni dans le plan de l'écliptique ni dans le plan qui contient l'équateur terrestre. Son orbite fait un angle de 5,1° avec le plan de l'équateur.

Pour les autres planètes la situation est similaire et, bien sûr, leur orbite n'est pas contenue dans l'écliptique. Quand on regarde la trajectoire des planètes dans le ciel (donc, par rapport aux étoiles) elles se déplacent près de l'écliptique passant au gré des mois ou des années d'un côté à l'autre de celle-ci. Leur mouvement apparent fait que parfois elles avancent et parfois elles reculent par rapport aux étoiles fixes.

([10]) http://www.shatters.net/celestia.

Un autre concept utile est celui de **jour solaire** et **jour sidéral**. Le **jour solaire** est simplement le temps entre deux passages du soleil par le méridien qui contient le **zénith**([11]). Évidemment un jour solaire dure 24 heures. Par contre un **jour sidéral** est le temps entre deux passages d'une même étoile par le zénith. Le jour sidéral dure un peu moins que le jour solaire parce que la terre tourne autour du soleil (voir la figure 11.12):

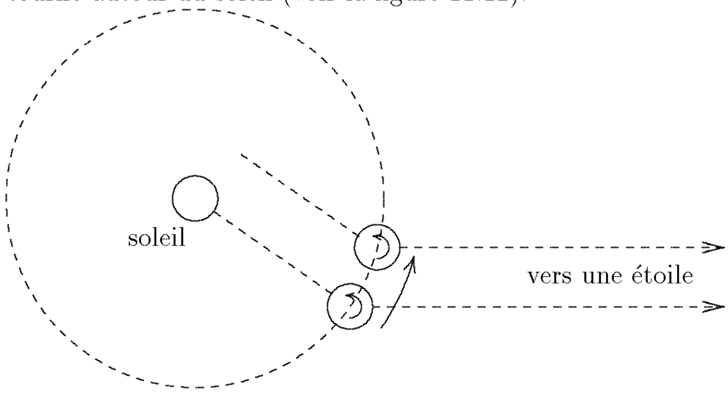


Figure 11.12 Le soleil et la terre vus de l'étoile polaire. Quand une étoile passe une deuxième fois au zénith d'un observateur côté nuit, le soleil n'a pas atteint le zénith de l'observateur côté jour. Il faut attendre un peu plus: 1/365ème de jour. L'angle entre les deux position successives de la terre est exagéré.

Quand la terre a fait un tour complet sur elle-même par rapport à un repère fixe (les étoiles), un observateur qui avait le soleil au zénith au début du tour n'aura pas encore le soleil au zénith car la terre a tournée sur son orbite de $2\pi/365$ radians: il lui faudra attendre 1/365ème de jour supplémentaire. La durée du jour sidéral est de $8{,}616409\,10^4$ secondes, alors que celle d'un jour solaire est de $24 \cdot 60 \cdot 60 = 8{,}64\,10^4$ secondes. Le jour sidéral est donc 236 secondes plus court que le jour solaire. Vu de la terre, le soleil se décale dans le ciel, par rapport aux étoiles du fond, d'environ 1 degré vers l'est par jour (le diamètre apparent du soleil est d'environ 0,5 degrés).

11.9 Exercices.

1 - Quand la planète Jupiter se trouve à une distance de $628\,10^9 m$ de la terre, son diamètre apparent est de 47" (secondes d'arc). Une seconde d'arc est égale à $1/60^{ème}$ de minute d'arc, laquelle est égale à $1/60^{ème}$ de degré. Le rayon apparent de l'orbite de son satellite *Europa* est de $3{,}67'$ (minutes d'arc). Calculez le diamètre de Jupiter et le rayon de l'orbite de Europa. La période orbitale de Europa est de $3{,}55\ jours$. Calculez la masse de Jupiter
R.N.: Valeurs vraies: $143\,10^6 m$; $671100\,km$; $1{,}898\,10^{27} kg$.

2 - Calculez le rapport entre les forces d'attraction exercées sur un objet situé sur la surface de la Terre, par celle-ci, par la lune et par le soleil.
R.N.: $\frac{F_L}{F_T} \simeq 3{,}4\,10^{-6}$; $\frac{F_S}{F_L} \simeq 177$.

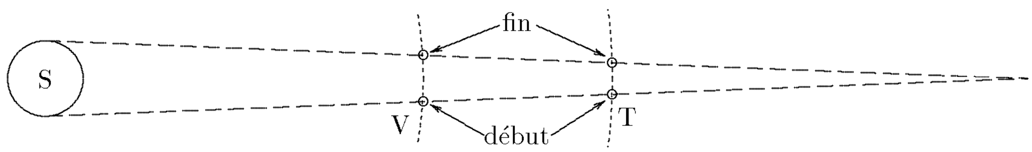
3 - Soient deux sphères de rayon R et densité ρ. Les sphères sont juste en contact et tournent autour de leur centre de masses. Calculez la vitesse angulaire ω pour laquelle la force centrifuge est égale à la force d'attraction gravitationnelle entre les deux sphères. Montrez que cette vitesse ne dépend pas de la masse mais seulement de la densité. Calculez la période pour une densité égale à celle de l'eau.
R.N.: $3{,}8\,heures$.

4 - Il est prévu que, en mai 2014, la sonde Rosetta se place en orbite autour de la comète Churyumov-Gerasimenko. Le diamètre de la comète est de $4\,km$ et sa densité est proche de

([11]) Le zénith est le point du ciel situé au dessus de l'observateur. On dit qu'un astre culmine quand il passe par méridien céleste qui passe par le zénith. Le point opposé au zénith (le zénith des antipodes) est le nadir.

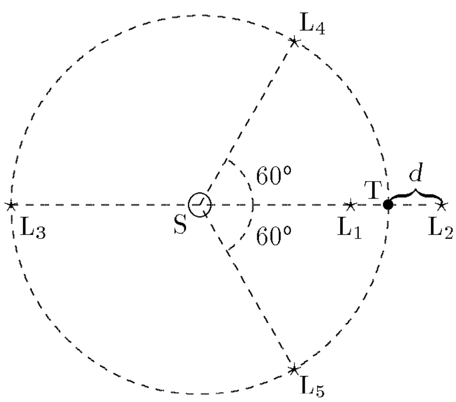
celle de l'eau. Calculez la période orbitale pour le rayon de l'orbite prévu de 25 km ainsi que la vitesse orbitale (tangentielle) de la sonde. En novembre 2014, un "atterrisseur" de 100 kg de masse se détachera de la sonde pour se poser sur la surface de la comète. Calculez l'accélération de gravité à la surface de la comète et le poids de l'atterrisseur. Il est prévu que l'atterrisseur s'accroche à la comète en lui enfonçant un harpon.
R.N.: 6 $jours$; 0,3 m/s; $g = 5{,}6\,10^{-4} m/s^2$; 0,056 N.

5 - Le 8 juin 2004 nous avons pu observer le transit de Venus devant le soleil. Comme l'orbite de Venus n'est pas située dans le même plan que celui qui contient celle de la terre (l'écliptique), ce phénomène n'arrive que si, au moment où Venus coupe l'écliptique, la terre se trouve alignée avec le soleil et Venus. Ceci arrive très rarement. Calculez quelle serait la durée maximale du transit si l'orbite de Venus était coplanaire avec celle de la terre.



La ligne pointillée du bas correspond au début du transit, quand Venus et la terre sont alignées avec le bord est du soleil. Dans celle du haut, Venus et la terre sont alignées avec le bord ouest du soleil, et c'est la fin du transit. Le point d'intersection des deux lignes pointillées est inconnu (mais calculable). Comme la durée du transit est très petite devant la période des planètes, vous pouvez approcher ces bouts d'orbite par des droites et vous servir du théorème de Thalès.
R.N.: $\simeq$ 8 heures.

6 - Soit un objet situé sur la droite qui passe par le soleil et par la terre et est situé au delà de la terre, à une distance d de celle-ci. Calculez cette distance de sorte que l'attraction du soleil plus l'attraction de la terre, fassent que la période de l'objet soit la même que celle de la terre. Le point de l'espace que vous déterminerez ainsi est le **point lagrangien $\mathbf{L_2}$**. On trouve deux autres points sur la même droite qui ont la même propriété: la période d'un objet de masse négligeable placé à cet endroit est la même que celle de la terre. Le point $\mathbf{L_1}$ est situé entre le soleil et la terre et le point $\mathbf{L_3}$ est situé sur l'orbite de la terre, de l'autre côté du soleil.



On trouve encore deux autres points $\mathbf{L_4}$ et $\mathbf{L_5}$ sur l'orbite de la terre mais à 60° devant et derrière celle-ci.
Vous obtiendrez une équation de 3ème degré qu'il faudra résoudre par des approximations successives.
R.N.: Pour L_2 $d = 1{,}365\,10^9 m$.

BIBLIOGRAPHIE.

R. RESNICK AND D. HALLIDAY. Physics part 1. Wiley . *C'est le livre dont je me suis le plus largement inspiré pour ces notes. J'ai notamment suivi l'ordre de présentation des différents sujets. Existe en édition française. Édité par DeBoeck Université.*

F. W. SEARS, M. W. ZEMANSKY. "College Physics", "Mechanics, Heat, and Sound" Addison-Wesley. *J'ai trouvé plusieurs idées et exemples dans ce livre. Malheureusement je crois qu'il est épuisé et qu'il n'existe pas en édition française.*

R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON ET M. SANDS. The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley. *Mon texte préféré de physique générale. Je ne suis pas sûr que ce livre soit le meilleur livre pour apprendre la physique. Par contre, quand on croit qu'on a presque tout compris, on trouve chez Feynman des nouvelles choses à comprendre et des vieilles à mieux comprendre. Existe en édition française sous la forme de 5 tomes portant le titre de* LE COURS DE PHYSIQUE DE FEYNMAN. *Édité par Dunod.*

C. KITTEL, W. KNIGHT ET M. RUDERMAN. Berkeley. Cours de physique Volume 1. Mécanique. Édité par Armand Colin.

PHYSICAL SCIENCE STUDY COMMITEE. Berkeley. La physique. Dunod.

M. ALONSO ET E. FINN. Physique Générale 1. Mécanique et thermodynamique. Dunod.

Indice Alphabétique.